Marjan Divjak

Ustvarjanje znanosti

Prvi del

www.diameter.si

Marjan Divjak

Ustvarjanje znanosti

Genetični uvod v matematiko, fiziko in tehniko

Prvi del

www.diameter.si

Avtor Marjan Divjak

Naslov Ustvarjanje znanosti I

Podnaslov Genetični uvod v matematiko, fiziko in tehniko

Oblikovanje Avtor

Prelom Avtor

Naslovnica Mornarski astrolab iz 1602. Replika. National Museum of American History.

Založba Samozaložba

Izdaja Prva izdaja, Ljubljana, 2019

http://www.diameter.si/sciquest/SCIQUEST1.pdf

Cena Brezplačna

Katložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici, Ljubljana
COBISS.SI-ID=299107584
ISBN 978-961-290-113-4 (pdf)

Vsebina

Predgovor

Dragi bralec, pred teboj je postopni vhod v matematiko, fiziko in tehniko kot soodvisne dosežke človeškega rodu od davnine do danes.

Knjigo sem napisal za svoje lastne potrebe in v svoje lastno zadovoljstvo. Hotel sem si ustvariti gladko pot iz ravnine naravoslovnega neznanja najprej na griče, odtod na hribe, in končno na gore spoznanja. Pri tem sem želel na vsakem koraku čutiti, kot da si pot utiram sam, in sicer zgolj na podlagi dotlej pridobljenega znanja in orodij. Na takšni poti ne bi smelo biti neutemeljenih definicij in postulatov, vzetih iz zraka, še zlasti pa ne nedokazanih trditev in sklicevanj na prihodnost. Do vsega sem želel priti razvidno in "sam".

Za voditeljico sem izbral zgodovino: kakor se je učil človeški rod, tako se naj uči človeški posameznik. Znanje, ki ga je do sedaj pridobilo človeštvo, namreč ni bilo brez razloga doseženo po poti, kakor jo kaže zgodovina. Razvoj znanja je mogoč le na podlagi obstoječega znanja in le v družbenem okolju, ki tovrsten razvoj podpira in po njem povprašuje. Takšna pot se mi zato zdi najbolj naraven, zanimiv in učinkovit vhod v znanost. Seveda pa je pri tem smotrno izpustiti številne zgodovinske zablode in stranpoti.

Količino znanja sem strogo omejil. Vključil sem le najpomembnejše. Znanje sem oblikoval v zaokrožena poglavja, navznoter čimbolj homogena in med seboj šibko sklopljena. Poglavja sem razvrstil po višinskih stopnjah: najprej griče, nato hribe in končno gore. Vsaka naslednja stopnja je zgodovinsko mlajša in gradi na prejšnji. Višja poglavja vsebujejo nižja kot posebne primere. Na poti skozi poglavja se noben korak ne sklicuje na prihodnje korake. Definicije, postulati in domneve so uvedeni: razvidno je, kaj nas navaja oziroma sili do njih. Izreki so izpeljani. Meritve so opisane. Če na dani stopnji ni možno dokazati izrekov in izvesti meritev, na to stopnjo ne spadajo. Vsako novo spoznanje je čimprej uporabljeno.

Razvoj znanja z zgodovino kot voditeljico nikakor ni brez težav. Stari avtorji so uporabljali drugačno besedišče in drugačno matematično pisavo kot danes. Zlasti velja to za simbolično stenografijo, ki se je pojavila šele dokaj pozno. Posamična odkritja praviloma tudi niso bila plod dela enega samega raziskovalca, marveč je bilo pri njih udeleženih več avtorjev. Težko je ugotoviti in pravično oceniti, kakšen delež pripada komu. In pot do odkritij je bila dostikrat hudo zavita.

Navedene težave sem poskušal odpraviti takole. Od vsega začetka sta uporabljena sodobno besedišče in sodobna matematična pisava. Da zgodovina ne bi zasenčila vsebine, sem v besedilu omenil le najvažnejše raziskovalce. Kolikor le mogoče sem se izognil poimenovanju pojavov, poskusov, konstant, zakonov in izrekov po osebah; namesto tega sem uporabil čim bolj nevtralno poimenovanje. Končno sem si vzel še pravico, da do nekaterih spoznanj pristopim drugače in v drugem vrstnem redu, kot so se zares zgodila. Bralce prosim, da to sprejmejo z razumevanjem.

V knjigi (prvem in drugem delu) je domala 500 slik. Kakšnih 30 % je mojih. Okrog 20 % jih je v javni lasti, ker so bile objavljene pred letom 1923 oziroma je minilo več kot 70 let od smrti njihovih avtorjev. Približno 40 % je takih, ki posebnega dovoljenja za objavo ne potrebujejo, ker so tako odločili njihovi avtorji ali ker prvi avtorji niso znani. Za preostalih 10 % slik pa ocenjujem, da njihova objava zadošča zahtevam "fair use" – med drugim je nekomercialna in izobraževalna ter ne škoduje tržnim aktivnostim lastnikov licenc – in je zato dovoljena. Lastnikom licenc se vnaprej zahvaljujem za razumevanje in dobrohotnost.

Ko izročam knjigo javnosti, imam v mislih naslednjo ciljno skupino bralcev: to so odrasli ljubiteljski in poklicni naravoslovci, ki jih zanimajo osnove, razvoj in poučevanje znanosti ter si želijo potešiti prav tisto, kar je navedlo mene do pisanja. Še posebej si želim, da bi knjiga našla pot do študentov pedagoške fizike in do učiteljev fizike na vseh šolskih stopnjah. Prvi še plezajo na svoje vrhove znanja, drugi pa so jih večinoma že osvojili, a so morda v dvomih, katera znanja naj posredujejo in po kateri poti naj vodijo, da bo izid najboljši. Zadovoljen bom, če jim bo knjiga pri tem pomagala.

— Marjan Divjak

Vodila

Merjenje

Če lahko to, o čemer govorite, izmerite in izrazite s števili, potem nekaj veste o tem; če pa ne znate tega meriti, če ne znate tega izraziti s števili, je vaše znanje borne in nezadostne vrste.
— W. THOMSON

Teorija in poskus

Znanost hodi po dveh nogah, teoriji in poskusu. Zdaj postavi naprej eno nogo, zdaj drugo. Nenehen napredek je mogoč samo z uporabo obeh – s teoretičnim razmišljanjem in potem s preizkušanjem, ali z odkrivanjem novih zvez pri poskusih in potem s tem, da pristavimo teoretično nogo in jo porinemo naprej in tako dalje izmenoma. — R. MILLIKAN

Teorije in resničnost

Pri naporih, da bi dojeli resničnost, ravnamo kot človek, ki poskuša doumeti mehanizem zaprte žepne ure. Vidi številčnico in pomikanje kazalcev ter sliši celo tiktakanje, vendar nikakor ne more odpreti ohišja. Če je bister, si zamisli mehanizem, ki mu more pripisovati vse to, kar vidi in sliši. Vendar se nikakor ne more zanesti na to, da je edino njegova zamisel taka, da se morejo z njo pojasniti opazovanja. Svojih zamisli ne more nikdar preizkusiti ob resničnem mehanizmu. — A. EINSTEIN

Pomen matematike

Matematika je jezik za količinsko opisovanje sveta … Napredovala je, kadar je bilo za matematike kaj resničnega dela, in je zastajala, kadarkoli je postala igrača v rokah skupine ljudi, odtujene od vsakdanjega življenja človeštva … Sedaj je postalo modno reči, da je matematika samo igra. Seveda nam to ne pove prav ničesar o njej. Nekaj nam pove le o kulturnih omejitvah nekaterih matematikov. Ko človek reče, da je matematika igra, se osebno izjavlja. Nekaj nam pove o sebi, o svojem lastnem odnosu do nje. Nič nam ne pove o javnem pomenu matematičnega jezika.
— L. HOGBEN

Poučevanje znanosti

Dvignil sem učbenik fizike, ki so ga uporabljali … Začel sem brati: "Triboluminiscenca. Triboluminiscenca je svetloba, ki jo oddajajo kristali pri drobljenju …" Rekel sem: "Torej, je to znanost? Ne! Povedali ste samo, kaj neka beseda pomeni z drugimi besedami. Ničesar niste povedali o naravi – *kateri* kristali sevajo svetlobo pri drobljenju, *zakaj* sevajo … Če pa bi namesto tega zapisali 'Ko vzameš kocko sladkorja in jo zdrobiš s kleščami v temi, zagledaš modrikast blisk. Tudi nekateri drugi kristali se tako obnašajo. Nihče ne ve, zakaj. Pojav imenujemo triboluminiscenca,' potem je to izkušnja narave." — R. FEYNMAN

Genetična pot

V svoji predstavitvi bom praviloma sledil genetični metodi. Bistvena zamisel te metode je, da je vrstni red, v katerem je človeštvo pridobilo znanje, tudi dober vrstni red za njegovo pridobivanje pri posamezniku … Vendar to ne pomeni, da moramo pri poučevanju znanosti ponoviti tisoč in eno napako iz preteklosti. — G. POLYA

Učna pot

Kakor se je učil človeški rod, tako se naj uči človeški posameznik. To je genetično načelo učenja znanosti. Po njem želimo vstopiti v svet matematike, fizike in tehnike.

Učenje znanosti po genetičnem načelu zahteva, da definiramo ustrezne *šolske stopnje* in jih povežemo z zgodovinskim dobami. Storimo to! *Predšola* naj pokrije prazgodovino (pred 5000 let pr. n. št.), *osnovna šola* stari in srednji vek (do 1500 let n. št.), *srednja šola* novi vek (do 1900 let n. št.) in *visoka šola* sodobnost. Seveda bomo meje po potrebi tudi prestopali. Napredovati torej hočemo po naslednjih šolskih / družbenih razvojnih stopnjah.

Predšola

Nabiralništvo in lov. Kakšnih 100 000 let pr. n. št. se v Afriki pojavi sodobni človek in se do 10 000 let pr. n. št. razširi po vseh kontinentih. Je nabiralec in lovec. Pozna kamnito orodje, ogenj in obleko iz kož. Takratno podnebje je hladno in spremenljivo.

Nižja osnovna šola

Poljedelstvo in živinoreja. Okrog 10 000 let pr. n. št. se podnebje nenadoma otopli in umiri. Ljudje takoj izkoristijo nove pogoje. V evrazijskih stepah se pojavi nomadska živinoreja. V rodovitnih predelih Bližnjega vzhoda, Jangcekjanga, Mezoamerike in Andov pa se razvije poljedelstvo ter se razširi v okolico. Ljudje se ustale v vaseh. Poznajo lončarstvo, tkalstvo in kovine.

Kmetijske države in gradbeništvo. Poljedelsko prebivalstvo se počasi namnoži in se organizira v države. Razvijejo se mezopotamska (3500 let pr. n. št.), egipčanska (3000 let pr. n. št.), kitajska (2000 let pr. n. št.), majevska (300 let n. št.), azteška (1200 let n. št.) in inkovska (1200 let n. št.) civilizacija. Ljudje orjejo, namakajo in zidajo stavbe ter templje. Ponekod prevažajo tovore z vozmi in veslačami. Uvedejo pisavo, številke, koledar, kataster in zakonik.

Višja osnovna šola

Urbanizacija in rokodelstvo. Ob Sredozemskem morju, na robu Mezopotamije in Egipta, se okrog leta 1000 pr. n. št. razvijejo primorske mestne državice, najprej feničanske in grške. Trgujejo in kujejo denar. Rimska država okrog leta 0 n. št. imperializira Sredozemlje in prinese državnost v njegove province. Z velikostjo pa rastejo tudi težave na mejah. Pastirski nomadi iz srednje Evrazije okrog leta 500 n. št. razrušijo zahodni del imperija. Na njegovem ozemlju se pojavijo nove države. Nato si nomadi iz Arabije do leta 1000 n. št. podvržejo južni in vzhodni del. Znanja iz vzhodne Evrazije prinesejo na njen zahod.

Srednja šola

Pomorstvo in trgovina. Prebujene zahodnoevropske države okrog leta 1500 n. št. razvijejo tisk, smodniško orožje in oceanske jadrnice. Kolonizirajo Afriko, Ameriko, Avstralijo in Oceanijo. Trgovina močno poraste.

Industrija in elektrifikacija. Svetovni trg zahteva svoje. Razvije se tovarniška proizvodnja snovi in izdelkov, ki jo okrog leta 1800 n. št. začno poganjati parni stroji. Sledi odkritje elektromagnetizma, kar spremeni svet. Države se elektrificirajo: gradijo elektrarne ter preko daljnovodov napajajo elektromotorje, grelce in razsvetljavo v industriji, mestih in gospodinjstvih. Namnožijo se motorni avtomobili, vlaki, ladje, podmornice in letala.

Visoka šola

Komunikacije in informatika. Človeštvo po letu 1900 n. št. iznajde brezžične električne komunikacije, digitalno zajemanje in zapis informacij, računalnike in jedrski reaktor. V vesolje pošlje satelite, sonde in ljudi. Na obzorju se pokaže nesluten razvoj robotike in medicine.

V vsaki izmed naštetih dob so se rojevali posamezniki, znani in neznani, ki so doprinašali k razvoju takratne znanosti. Seveda so njihovi doprinosi vplivali nazaj na družbeno okolje in ga po svoje preoblikovali. Privzemimo vlogo teh posameznikov in se podajmo na čudovito pot spoznavanja in mojstritve narave od pradavnine do današnjih dni!

1 Telesa in dogodki

Telesa – Oblika in snov – Snovna stanja – Lastnosti teles – Lega teles – Dogodki in dogajanja – Gibanje teles – Ples snovi

1.1 Telesa

Poimenovanje

Zamislimo si, da živimo kot prvobitni lovci in nabiralci! Spoznavanje narave začnemo z opazovanjem okolice in s poimenovanjem opaženega. Tako rečemo, na primer: tole je "človek" in tisto je "drevo". Oboje lahko primemo z roko in vidimo z očmi. Rečemo, da sta to *telesi*. Se pa na otip in pogled razlikujeta in ju zato tudi poimenujemo z različnima besedama. Svet okoli nas je poln teles. Ljudje, živali, rastline, kamni, gore – vse to so telesa. Vse lahko primemo in vidimo.

1.2 Oblika in snov

Oblika teles

Tudi kepa gline je telo. Z rokama jo lahko gnetemo in izdelamo, na primer, "kroglo" ali "kvader". Rečemo, da imata nastali telesi različno *obliko*. Če smo spretni, lahko izdelamo celo kipec v obliki človeka. Nasploh imajo telesa v naravi oblike, ki so si med seboj bolj ali manj *podobne* ali *različne*.

Snovi

Kipec človeka in pravo človeško telo imata sicer enako obliko, a se razlikujeta po tem, iz česa sta zgrajena. Prvi je iz gline in drugi iz kosti in mesa. Rečemo, da so to različne *snovi*. Nasploh so telesa zgrajena iz najrazličnejših snovi: kamni iz kamnin, drevesa iz lesa in gore iz marsičesa.

1.3 Snovna stanja

Trdnina

Glinasta krogla ostaja "okrogla", če je ne gnetemo; lesena palica ostaja "ravna", če je ne upognemo ali zlomimo: oblika mnogih teles se navadno ne spreminja, če jih pustimo pri miru. Rečemo, da so ta telesa *trdna* oziroma da je snov, iz katere so sestavljena, *trdnina*. Kadar se trdnina pod obremenitvijo ne spremeni zaznavno, jo proglasimo za *togo*, sicer pa za *deformabilno*.

Tekočina

Kaj pa jezero vode? Tudi to je telo, saj njegovo snov – vodo – lahko zajamemo v roko ali v posodo in jo vidimo. A voda ne ohranja svoje oblike, ampak se prilagodi vsakokratni obliki posode, v katero jo nalijemo. Pri tem vedno oblikuje *gladino*. Ko med dvema vodnima mlakama izkopljemo jarek, pa se voda *pretaka* iz ene mlake v drugo, dokler se gladini ne izravnata. Isto se zgodi, če mlaki povežemo s tunelom pod vodnima gladinama. Rečemo, da je voda *tekočina* oziroma da je jezero tekoče telo.

Plin

Ko stojimo v deroči reki, čutimo njen potisk. Podoben občutek imamo v močnem vetru. Očitno nas tudi tedaj potiska tok neke nevidne tekočine. To je zrak. Tega nenehno vdihavamo v pljuča in izdihavamo. Izdihanega zraka ne moremo natočiti v posodo, lahko ga pa ujamamo v kožni meh za vodo. S tem, ko se meh razpne v vse smeri, kaže, da zrak zasede vsak njegov kotiček. Pri tem ni videti nobene gladine. Pravimo, da je zrak *plin* in da je ozračje plinasto telo.

1.4 Lastnosti teles

Oblika in snov nista edino, po čemer se telesa med seboj razlikujejo.

Velikost

Kamen, ležeč ob skali, je *majhen* in skala je *velika*. Rečemo, da imata omenjeni (podobni) telesi različno *velikost*. Za izbrani predmet pa primerjava pokaže, ali je manj, bolj ali enako velik kot kakšen drug predmet.

Dolžina

Lovska puščica je *kratka* in kopje je *dolgo*. Rečemo, da imata omenjeni (podolgovati) telesi različno *dolžino*. Ko postavimo izbran predmet ob bok kakšnega drugega predmeta, pa vidimo, ali je manj, bolj ali enako dolg od slednjega. Za rastoča drevesa raje rečemo, da so bolj ali manj visoka.

Teža

Kos lesa v roki je *lahek*, kamen v drugi roki je *težek*. Rečemo, da imata telesi različno *težo*. Težkanje z rokama pokaže, ali je en predmet manj, bolj ali enako težek kot drugi. Ponavadi so večja telesa tudi težja: večji kos istega lesa je težji od manjšega. Je pa manjši kamen lahko težji od večjega polena lesa.

Temperatura

Voda v studencu je na dotik *hladna*, voda v mlaki je *topla* in kamen, na katerega pripeka sonce, je *vroč*. Rečemo, da imajo telesa različno *temperaturo*. Dotik pove, ali ima izbrano telo manjšo, večjo ali enako temperaturo kot kakšno drugo telo, oziroma ali je manj, bolj ali enako toplo.

Barva

Trava je na pogled *zelena*, morje *modro* in oblaki *beli*. Rečemo, da imajo telesa različno *barvo*. Barv je brez konca. Ne moremo jih pa razvrstiti v naraščajoče zaporedje kakor na primer dolžine, teže ali temperature. Prav tako opazimo, da je barva telesa odvisna od okoliščin: ponoči so vsa telesa črna in v jutranji zarji so rdečkasta.

1.5 Lega teles

Navpičnica

V lovskem taboru je navada, da meh za vodo obesimo z vrvjo na primerno drevesno vejo. Napeta vrv, v mislih podaljšana preko obeh koncev, oblikuje črto *navpičnico*. Ko vrv odvežemo, pade meh na tla vzdolž navpičnice. Tudi drevesa navadno rastejo vzdolž navpičnic. Rečemo, da so *navpična*. Če ni tako, jih imenujemo *poševna*; ena bolj, druga manj.

Horizontalna ravnina

Ko drevesa posekamo in padejo ter zaplavajo na vodni gladini, postanejo *vodoravna*. Namesto da ocenjujemo poševnost dreves glede na navpičnico, jo lahko določamo tudi glede na vodno gladino – *horizontalno ravnino*. Za navpičnico pri tem rečemo, da stoji *pravokotno* na gladino. Ko človek stoji, je navpičen, in ko se uleže, je vodoraven. Za poševne hribe pa rečemo, da so bolj ali manj strmi.

Smerne osi

Ko gledamo kakšnega lovca in njegov taborni šotor, vidimo naslednje. Lovec je *v* šotoru ali *izven* njega; *pred* ali *za* njim; *ob* njem ali *proč* od njega. Rečemo tudi, da je nebo *nad* šotorom in zemlja *pod* njim. Tako povemo *lego* lovca ali neba ali zemlje glede na šotor. Seveda velja povedano za vsakršna telesa, ne le za šotor. Posebej je odlikovano kar naše lastno telo. V tem primeru razlikujemo še, ali je kakšen predmet *desno* ali *levo* od nas. Vse to nas uči, da lego opazovanega telesa povemo z ozirom na kako drugo primerno telo, iz katerega štrlijo tri zamišljene osi: "gor-dol", "naprej-nazaj" in "levo-desno". Rečemo, da je to *izhodiščno telo* in da so to njegove *smerne osi*. Predmet, ki mu določamo lego, leži bolj ali manj tesno vzdolž ene izmed osi in je bolj ali manj oddaljen.

1.6 Dogodki in dogajanja

Dogodki

Ko lovec zapusti šotor, je to *dogodek*, in ko se vrne, prav tako. Vmes lovec išče in zalezuje divjad po okolici, in to je *dogajanje*. Rečemo, da se dogodek *zgodi*, dogajanje pa *traja*. Kakor ima pohodna palica začetek in konec, tako ima lovska odprava svoj odhod in prihod.

Svet je poln dogodkov in dogajanj. Plosk z rokama, štrbunk kamna v vodo in udarec strele iz oblaka v drevo, vse to so dogodki. Lov, postavljanje tabora ali spanje, to so pa dogajanja. Vsako dogajanje ima svoj začetek in konec.

Hkratnost

Če pes zalaja, ko stopi lovec iz šotora, rečemo, da sta oba dogodka *hkratna* ali *sočasna*. Lahko pa pes zalaja *prej* ali *kasneje*. Dva dogodka lahko zmeraj primerjamo po tem, ali ju zaznamo hkrati ali ne, in določimo, kateri je prejšnji in kateri je kasnejši. Dogodke ločimo na tiste, ki jih ravnokar zaznavamo, na tiste, ki se jih spominjamo, in na one, ki jih še pričakujemo. Rečemo, da so to *sedanji*, *pretekli* in *prihodnji* dogodki. V spominu hranimo celo zaporedje preteklih dogodkov.

Trajanje

Dva lovca naj zjutraj istočasno odideta na lov. Eden se naj vrne prej kot drugi. Potem rečemo, da je njegov lov trajal manj časa kot drugi. Drugi lov je pa trajal več časa. Če se lovca vrneta hkrati, pa rečemo, da sta lova trajala enako časa. Love – in vsakršna druga dogajanja – lahko torej primerjamo po trajanju, če se le začnejo ali končajo hkrati.

1.7 Gibanje teles

Premiki teles

V taboru je lovec zdaj tu, zdaj tam. Rečemo, da ni pri miru, ampak se *premika*. Premikajo se ljudje, živali, pa tudi mnogo drugih teles: listi padajo z dreves in plavajo po reki, kamni se valijo z gora in Sonce, Mesec ter zvezde nenehno plujejo po nebu. Svet teles je poln *gibanja*.

Hitrost

Vsi otroci radi tekajo. Včasih tekmujejo, kdo bo prej pretekel pot od tabora do oddaljenega drevesa. Začnejo hkrati. Tisti, ki pride najprej na cilj, je za izbrano pot potreboval najmanj časa. Rečemo, da je *najhitrejši*. Drugi so pa *počasnejši*. Kar velja za otroke, velja za telesa nasploh. Tisto telo, ki za isto pot porabi manj časa, ali ki v istem času opravi daljšo pot, je bolj hitro. Rečemo, da imajo telesa različne *hitrosti*.

1.8 Ples snovi

Življenje teles

Človek se rodi, živi in umre. Tudi druga telesa nastajajo, se spreminjajo in izginjajo. Na nek način tudi ona "živijo". Življenjska doba marsikaterega telesa, recimo okroglega kamna na bregu reke, pa je tako dolga in njegove spremembe tako počasne, da jih ne opazimo.

Snovni vrtinci

Kaj pa snovi, iz katerih so telesa zgrajena? Preden se je telo "rodilo", je bila njegova snov razpršena po okolici, in ko telo "umre", se snov spet vrne v okolico. To kaže, da je snov mnogo bolj dolgoživa kot telesa, ki jih gradi, in da morda obstaja od nekdaj in bo morda obstajala za vedno. Telesa so pa le začasni snovni vrtinci, dovolj ločeni od okolice in dovolj dolgotrajni, da si zaslužijo svoja imena. □

2 Naravna števila

Številčnost teles – Pisanje števil – Seštevanje – Odštevanje – Množenje – Deljenje – Računski zakoni

2.1 Številčnost teles

Množice

Kdo še ni videl, da se ptice zbirajo v jate in ovce v črede? Rekli bomo, da je opazovana jata ali čreda *množica*, posamične ptice ali ovce pa njeni *elementi*. Nasploh so množice lahko sestavljene iz različnih elementov. Posebej odlična je množica prstov na rokah, ki jo vedno nosimo s seboj.

Za vsako ovco v čredi lahko, kot pastirji, dvignemo svoj prst. Zgodi se naslednje: zmanjka prstov; preostane nekaj prstov; ali pa so vse ovce pregledane in vsi prsti dvignjeni. Ustrezno rečemo, da je ovc *več*, *manj* ali *enako mnogo* kot prstov. Rečemo tudi, da ima vsaka množica posebno lastnost, *številčnost*, in da je množica ovc bolj, manj ali enako številčna kot množica prstov.

Mala števila

Ko dvigujemo prste, s tem gradimo vedno nove množice dvignjenih prstov. Številčnost vsake naslednje množice je večja od predhodne. Posamične številčnosti poimenujemo, po vrsti: *nič*, *ena*, *dve*, *tri* … *devet*, *deset*. To so primerki *naravnih števil*. Številčnost poljubne množice (ovc v ogradi, ljudi v taboru) označujemo s temi števili. Rečemo, da elemente množice *štejemo*.

Slika 2.1 Štetje s prsti. Od leve proti desni so prikazana števila nič, ena, dve, tri, štiri in pet. (Anon)

Velika števila

S prsti lahko štejemo le do deset. Če je elementov več, si pomagamo tako, da delamo zareze v palico. Za vsak element naredimo eno zarezo. Zaradi večje preglednosti združimo zareze v skupine po deset – *desetice*, nato pa posebej preštejemo, koliko je teh desetic, in posebej, koliko je preostalih elementov, *enic*. Tako rečemo, na primer, dvanajst (dve nad deset) ali oseminpetdeset (osem in pet deset). Pri še večjih številčnostih združujemo tudi desetice v skupine po deset – *stotice*, in stotice v *tisočice*, ter štejemo posebej tisočice, stotice, desetice in enice. Kot pastirjem in poljedelcem nam to povsem zadostuje.

2.2 Pisanje števil

Številke

Z nastankom kmetijskih držav se uvede pobiranje davkov v pridelkih. Za to skrbijo državni uradniki. Ti morajo seveda vedeti, koliko vreč žita ali koliko vrčev olja imajo od vsakega podložnika že pobranih in shranjenih v skladiščih oziroma koliko jih ti še dolgujejo. Tudi prebivalstvo in njihovo živino je treba občasno prešteti. Zato, kot državni pisarji, izumimo za zapis števil posebne oznake, *številke*: 0 (nič), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 (devet). Če pozorno pogledamo, vidimo, da so to pravzaprav stilizirane slike sklenjene pesti, enega, dveh in treh iztegnjenih prstov, kvadrata iz štirih paličic in tako naprej. Pišemo na glinaste ploščice, pergament in papir.

Desetiški zapis

Z uvedenimi številkami zapišemo poljubno velika števila na zelo učinkovit način. Število dva tisoč trinajst, na primer, zapišemo kot 2013; pri tem posamične številke, od desne proti levi, označujejo število enic (tri), desetic (ena), stotic (nič) in tisočic (dve). To je desetiški mestni zapis števil. V njem ima vsaka številka dvojno vrednost: številčno (koliko enot označuje) in mestno (kakšne enote – enice, desetice itd. pomeni). Očitno lahko na ta način zapišemo še tako velika števila. Nekatera od njih tudi poimenujemo: tisoč tisočic proglasimo za *milijon* in tisoč milijonov za *milijardo*. Slednja enota, se zdi, bi v pošteni državi že morala zadostovati za vse potrebe.

2.3 Seštevanje

Združevanje množic

Ko se dve čredi ovac – dva davka – združita, nastane nova čreda. Pri tem samoumevno privzamemo, da ob združevanju nobena začetna ovca ne izgine oziroma da se ne pojavi nobena nova. Začetni čredi sta imeli vsaka svojo številčnost in združena čreda ima spet svojo številčnost. Kako jo določimo? S štetjem, seveda: bodisi ovac ali – lažje – njih nadomeščujočih prstov ali kamenčkov.

Združujemo lahko poljubne množice: ovce v ogradi, ljudi v hišah in drugo. Naj bo, na primer, številčnost prve množice 7 in druge 5. Številčnost združene množice je potem enolično določena s številčnostjo prvotnih dveh množic; simbolično jo označimo kot $7+5$ in preberemo "sedem in pet" oziroma "sedem plus pet". Ko združeno množico zares preštejemo, dobimo 12. Rečemo, da smo dve števili *sešteli* in dobili njuno *vsoto*, kar na kratko zapišemo kot $7+5=12$ in preberemo "sedem plus pet je dvanajst". Leva stran zapisa predstavlja *nakazano* vsoto in desna stran (s štetjem) *izračunano* vsoto. Povezuje ju znak za enakost.

Seštevanje enomestnih števil zlahka opravimo s prsti ali kamenčki. Sčasoma jih niti ne potrebujemo več in seštevamo kar v mislih. S štetjem dobljene vsote lahko tudi zberemo v tabelo *seštevanko*: $1+1=2$, $1+2=3$ … $9+9=18$ in si jo zapomnimo. Kdor hoče postati dober državni pisar, mu za to ne sme biti žal truda.

Tabela 2.1 Seštevanka – tabela vsot za poljubni dve enomestni števili.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Pisno seštevanje

Večja števila seštevamo v mislih tako, da prvemu številu prištevamo po vrsti vse desetiške enote drugega, začenši z najvišjo enoto. Za to zadostuje poznavanje seštevanke. Pri tem številke izgovarjamo, da si olajšamo pomnjenje. Rečemo, da seštevamo "ustno". Postopek lahko učinkovito organiziramo s pisanjem. Ravnamo takole. Oba seštevanca zapišemo drugega pod drugim tako, da stoje enice v isti navpičnici. Nato seštejemo enice, potem desetice itd. Če dobimo pri kaki desetiški enoti 10 ali več, zapišemo le enice, desetice pa prenesemo v naslednjo višjo desetiško enoto. Zgled:

```
  579
+ 43
  ───
  622
```

Tri in devet je dvanajst; zapišemo dve in prenesemo eno v stolpec desetic. (Prenešena) ena in štiri je pet in sedem je dvanajst; zapišemo dve in prenesemo eno v stolpec stotic. (Prenešena) ena in pet je šest; zapišemo šest.

Na enak način seštevamo tudi stolpec iz več kot dveh števil, le prenašati je treba večja števila.

2.4 Odštevanje

Ločevanje množic

Iz črede ovac lahko izločimo kakšno čredico. Začetna čreda, izločena čredica in preostala čreda, vsaka ima svojo številčnost. Naj bo, na primer, številčnost začetne črede 7 in številčnost odstranjene čredice 2. Potem nakažemo številčnost preostale črede kot $7-2$ in preberemo "sedem manj dve" oziroma "sedem minus dve". Ko čredo zares preštejemo, dobimo 5. Rekli bomo, da smo od prvega števila *odšteli* drugo število in dobili njuno *razliko*: $7-2=5$. Očitno je razlika tisto "dopolnilno" število, ki ga moramo prišteti okleščeni množici, da dobimo začetno množico.

Pisno odštevanje

Majhna števila odštevamo kar v mislih, podobno kot pri seštevanju: od prvega števila odštevamo po vrsti vse enote drugega števila, začenši z največjo. Za večja števila pa uporabljamo naslednji pisni postopek. Drugo število zapišemo pod prvo ter z dopolnjevanjem odštevamo posamične enote, pričenši z enicami. Če je zgornja številka manjša od spodnje, ji prištejemo deset, hkrati pa naslednjo spodnjo desetiško številko povečamo za ena. Zgled:

```
 739
−256
 ───
 483
```

Šest in koliko je devet? Zapišemo tri. Pet in koliko je trinajst? Zapišemo osem in prenesemo eno v naslednji stolpec. (Prenešena) ena in dve je tri; koliko je še do sedem? Zapišemo štiri.

2.5 Množenje

Združevanje enakih množic

Delavce, ki gradijo državne stavbe, je treba prehranjevati in to zahteva načrtovanje. Naj poje delavec na dan tri (majhne) hlebce kruha. Koliko hlebcev poje pet delavcev? Sešteti moramo torej pet trojk. Vsoto $3+3+3+3+3$ zapišemo na kratko kot $5 \cdot 3$ (ali tudi 5×3) in preberemo "pet krat tri". S tem definiramo *množenje* števila 3 s številom 5 oziroma *produkt* teh dveh *faktorjev*. To je nakazani produkt; s štetjem pa ga dejansko izračunamo: $5 \cdot 3 = 15$. Kar velja za seštevanje enakih množic hlebcev, velja tudi za seštevanje enakih množic poljubne vrste.

Pisno množenje

Za lažje računanje produktov si zabeležimo (s seštevanjem) dobljene produkte enomestnih števil, jih uredimo v tabelo *poštevanko* $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2$ … $9 \cdot 9 = 81$ in si jo zapomnimo.

Tabela 2.2 Poštevanka – tabela produktov za poljubni dve enomestni števili.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Večja števila množimo z enomestnim številom tako, da prvi faktor razcepimo na vsoto desetiških členov, vsakega množimo z drugim faktorjem ter dobljene delne produkte seštejemo. Če je drugi faktor večmestni, a se da zapisati kot produkt enomestnih števil, množimo prvi faktor zaporedoma z njimi. Za to zadostuje znanje seštevanke in poštevanke. Splošni postopek pa učinkovito organiziramo takole. Oba faktorja zapišemo vštric. Nato z najvišjo enoto desnega faktorja množimo posamične enote levega faktorja, začenši z enicami. Če je kakšen rezultat dvoštevilčen, zapišemo samo enice in prištejemo zapomnjene desetice k produktu z naslednjo višjo enoto. Tako dobimo prvi delni produkt. Postopek ponovimo z vsako naslednjo nižjo enoto desnega faktorja in rezultat zapisujemo kot naslednji delni produkt pod prejšnjega, vendar vsakokrat zamaknjenega za eno mesto v desno. Na koncu vse delne produkte seštejemo. Zgled:

```
 539 · 27
_________
1078
 3773
_________
14553
```

Dva krat devet je osemnajst; zapišemo osem, zapomnimo ena. Dva krat tri je šest; plus (zapomnjena) ena je sedem; zapišemo sedem. Dva krat pet je deset; zapišemo deset. — Sedem krat devet je triinšestdeset; zapišemo tri, zapomnimo šest. Sedem krat tri je enaindvajset; plus (zapomnjena) šest je sedemindvajset; zapišemo sedem, zapomnimo dve. Sedem krat pet je petintrideset; plus (zapomnjena) dve je sedemintrideset; zapišemo sedemintrideset. — Seštejemo prvo in drugo vrstico.

2.6 Deljenje

Ločevanje v enake množice

V shrambi imamo petnajst hlebcev. Razdeliti jih hočemo na pet enakih kupov, po enega za vsakega delavca. Koliko hlebcev pride v tak kup? Najpreprosteje to ugotovimo tako, da iz shrambe jemljemo posamične hlebce in jih po vrsti nalagamo na prvi, drugi … peti kup. To delamo, dokler ne preostane v shrambi nič ali manj kot pet hlebcev, ki jih, celih, ne moremo več razdeliti. Potem preštejemo, koliko je hlebcev v kakem kupu. Rekli bomo, da smo število petnajst *delili* s številom pet, kar zapišemo kot $15 : 5$ (ali tudi $15 \div 5$) in preberemo "petnajst deljeno s pet". Rekli bomo tudi, da je to nakazani *kvocient* dveh števil, *deljenca* in *delitelja*. S štetjem ugotovimo dejanski kvocient, 3, ter zapišemo $15 : 5 = 3$. Očitno je kvocient tisto število, s katerim moramo pomnožiti delitelj (ter produktu prišteti morebitni ostanek), da dobimo deljenec.

Pisno deljenje

Večja števila delimo z enomestnim številom tako, da deljenec razcepimo v primerno vsoto – takšno, da je vsak njen člen deljiv z deliteljem brez ostanka, nakar člene delimo po vrsti ter dobljene kvociente seštejemo. Če je delitelj večmestni, a se da zapisati kot produkt enomestnih števil, delimo deljenec po vrsti z njimi. Pri tem nam zadostujeta seštevanka in poštevanka. Deljenje večmestnih števil je nasploh težko opravilo, zato je najbolje, da ga organiziramo po naslednjem postopku. Obe števili zapišemo vštric. Potem delimo vse desetiške enote deljenca, od največje proti najmanjši, z deliteljem, kakor pove naslednji zgled:

```
981 : 23 = 42
 61
 15 ostanek
```

Najvišja desetiška enota, devet, ni deljiva s triindvajset, najvišji dve, osemindevetdeset, pa že. — Triindvajset gre v osemindevetdeset (ugibamo) štirikrat, zapišemo štiri. — Kolikšen je ostanek? Štirikrat tri je dvanajst in koliko je osemnajst? Šest, zapišemo šest, ostane ena. Štirikrat dve je osem, plus (preostala) ena je devet in koliko do devet? Nič. Ostanek, šest, je torej manjši od triindvajset, kar je v redu. Če bi bil ostanek večji, je bilo ugibanje kvocienta napačno in ga je treba povišati. — K ostanku pripišem naslednjo desetiško enoto, eno. — Triindvajset gre v enainšestdeset (ugibamo) dvakrat, zapišemo dve. — Kolikšen je ostanek? Dvakrat tri je šest in koliko je enajst? Pet, zapišemo pet, ostane ena. Dvakrat dve je štiri, plus (preostala) ena je pet in koliko do šest? Ena, zapišemo ena. Ostanek, petnajst, je spet manjši od delitelja, kar je v redu. — Ker nimamo več desetiških enot za pripisovanje, končamo.

2.7 Računski zakoni

Lastnosti operacij

Seštevanje, množenje, odštevanje in deljenje bomo poimenovali osnovne *računske operacije*. Od teh sta prvi dve "direktni", drugi dve pa njima "obratni". Direktni operaciji imata nekatere lepe lastnosti, kot smo deloma že videli ali kot se lahko dodatno prepričamo s polaganjem kamenčkov. Če s črkami m, n in k označimo katerakoli naravna števila, velja:

$$\begin{aligned} & m+n=n+m \\ & (m+n)+k=m+(n+k)=m+n+k \\ & m\cdot n=n\cdot m \\ & (m\cdot n)\cdot k=m\cdot(n\cdot k)=m\cdot n\cdot k \\ & k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Oklepaji označujejo vrstni red operacij. Znak za množenje ponavadi kar izpuščamo. Z besedami rečemo, po vrsti, da je vsota komutativna in asociativna, produkt pa komutativen, asociativen in distributiven glede na vsoto. Naštete lastnosti, njih pet, poimenujemo *računske zakone*. Pravzaprav niso nič drugega kot odsev dejstva, da se pri združevanju in razdruževanju množic njihovi elementi ohranjajo, to je, da obstoječi elementi ne izginjajo, niti ne nastajajo novi. □

3 Nebesni svod

Sonce – Svetloba – Gnomon – Obzorni krog – Nebesna telesa – Zemljin sistem

3.1 Sonce

Dan in noč

Od vseh teles v naravi je najmogočnejše *Sonce*, velika žareča krogla na nebu. Prijeti ga sicer ne moremo, ker je predaleč, ga pa dobro vidimo. Sonce ni pri miru, ampak vzhaja izza obzorja, dosega vrh – *kulminira* – in zahaja nazaj za obzorje. Vsakič prinese s seboj svetlobo in toploto ter ju s seboj tudi odnese. Tako ustvarja zaporedje svetlih in temnih obdobij, (belih) *dnevov* in *noči*. Brez Sonca bi bila na Zemlji večna tema in mraz. Seveda ne bi bilo niti nas.

3.2 Svetloba

Sence in žarki

Ob sončnem dnevu mečejo drevesa po tleh *sence*. V notranjosti stavb, ki imajo odprtine v stenah, pa se rišejo svetle pege. Očitno izhaja iz Sonca nekaj, kar se širi na vse strani v ravnih črtah, če ni ovir. Tisto nekaj poimenujemo *svetloba*, Sonce pa *svetilo*. Svetila so nasploh telesa, ki sama od sebe sevajo svetlobo. Goreč les in zvezde, ki jih vidimo ponoči na nebu, so tudi svetila. Druga telesa vidimo le zato, ker na njih pada svetloba in se odbija v naše oko. Sončno svetlobo zaznavamo tudi s kožo: čutimo jo kot toploto. Ozkemu snopu svetlobe rečemo *žarek*. Predstavljamo si, da je to nekakšen curek svetlobnih delcev.

3.3 Gnomon

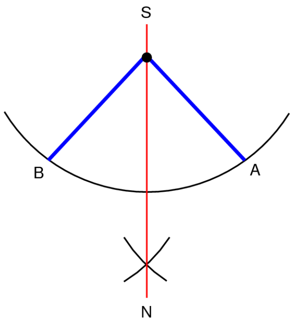
Jug in sever

Ko gledamo zaporedne kulminacije Sonca, se zdi, da se vedno dogajajo nad isto točko obzorja. Ker Sonca ne smemo neposredno gledati, da si ne poškodujemo oči, raje opazujemo senco, ki jo meče navpična palica po vodoravnih tleh. To je *gnomon*. Navpičnost dosežemo z obteženo vrvico – *grezilom*. Da so tla vodoravna, pa zagotovimo tako, da okrog gnomona izkopljemo jarek, vanj natočimo vodo in tla poravnamo z gladino.

Slika 3.1 Gnomon – navpična palica, ki meče senco na vodoravna tla. Ko je senca najkrajša, je poldan. Takrat kaže senca smer sever-jug. Gnomon je najstarejši človekov merilnik. Prej ali slej ga neodvisno iznajdejo vsa ljudstva. Tukaj merita dva domačina na Borneu. (Needham, 1995)

Ob kulminaciji je Sonce najviše na nebu in senca je najkrajša. Takrat kaže z enim koncem proti *jugu* in z drugim proti *severu*.

Smer sever-jug določimo natančneje tako, da začrtamo okrog gnomona z vrvico primerno velik krog. Senca, poslušna Soncu, se vrti, pri čemer se dopoldne krajša in popoldne spet daljša. Njen vrh se zato dvakrat dotakne kroga. Ti dve točki označimo, ju povežemo z vrvico in slednjo razpolovimo.



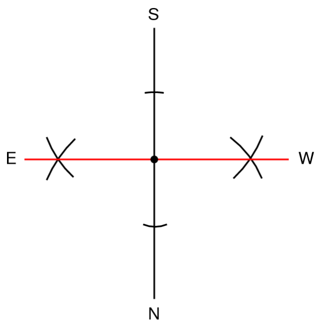
Slika 3.2 Določitev smeri sever-jug z gnomonom. Črni krožec je gnomon. Okrog njega je zarisan krožni lok. Enkrat dopoldne vrže gnomon senco do A, enkrat popoldne pa do B. Obe senci sta enako dolgi. Razdaljo med A in B razpolovimo z vrvico ali pa narišemo dva presečna loka iz A in B. S tem je določena črta NS od severa proti jugu.

Vzhodišče in zahodišče

Jug lahko določimo tudi drugače – iz obeh točk na obzorju, kjer Sonce na isti dan vzhaja in zahaja. To sta *vzhodišče* in *zahodišče*. Kje je vzhodišče, določimo in označimo z dvema koloma, ki ju zabijemo v zemljo. Ko vidimo kola poravnana, kažeta v ustrezno smer. Kol, ki je bliže očesu, poimenujemo *merek*, drugega pa *muha*. Podobno velja za zahodišče. Smer do tja označimo z že obstoječim merkom in z novo muho. Pridelani trije koli – merek in dve muhi – tvorijo *ogel* ali *kot*. Ta kot razpolovimo z vrvico in razpolovišče spet označimo s kolom-muho. Dobili smo smer proti jugu.

Vzhod in zahod

Na črto sever-jug določimo z vrvico pravokotnico, ki kaže *vzhod* in *zahod*. S tem smo določili glavne *strani neba*. Vmesne strani dobimo, ko razpolovimo kote med glavnimi smermi: med severom in vzhodom dobimo severovzhod in podobno drugod.



Slika 3.3 Določitev pravokotnice na črto NS skozi izbrano točko na njej. Iz točke narišemo dva krožna loka, ki sekata črto. Nato iz obeh presečišč narišemo na vsaki strani po dva presečna loka. S tem je določena pravokotnica EW od vzhoda proti zahodu.

Po označenih straneh neba opisujemo smeri potovanj. Z njimi tudi poimenujemo vetrove. V naših krajih, na primer v Ljubljani, piha veter večinoma od zahoda; rečemo mu zahodnik. Severni veter, severnik, je mrzel in južni veter, jugo, je topel. Takšni morajo biti tudi kraji, iz katerih pihata.

3.4 Obzorni krog

Letne dobe

Opazovanja zaporednih vzhodov in zahodov Sonca pokaže, da ostaja jug nespremenjen, vzhodišče in zahodišče pa se mu vsak na svoji strani počasi odmikata ali primikata. Hkrati se s tem spreminja tudi višina kulminacij Sonca med najnižjo in najvišjo vrednostjo. V dneh, ko je kulminacija visoka, so dnevi vroči; rečemo, da je takrat *poletje*. Kadar pa je kulminacija nizka, so dnevi mrzli in imamo *zimo*. Vmes umestimo še *pomlad* in *jesen*. Tako je gibanje Sonca združeno tudi z menjavo letnih dob. Pravzaprav je Sonce vzrok letnim dobam: čim više je na nebu, tem več svetlobe in toplote vpada na tla in jih tem bolj segreva.

Sončni koledar

Za poljedelce je življenjskega pomena, da vedo, kdaj sejati, zato – v vlogi njihovih svečenikov – postavimo neuničljive *obzorne kroge* iz kamnov, ki kažejo različna odlikovana vzhodišča in zahodišča Sonca.

Slika 3.4 Kamniti obzorni krog Stonehenge v Angliji. Kamni kažejo različne odlikovane smeri na obzorju, na primer najjužnejše vzhodišče Sonca. (National Geographic)

Posamezne točke na obzornem krogu kažejo, na kateri dan je treba kaj delati na polju. Rečemo, da predstavljajo *sončni koledar*. V njem so posebej odlikovani štirje dnevi. Prvi je spomladi takrat, ko Sonce vzhaja točno na vzhodu in zahaja točno na zahodu. To je *pomladansko enakonočje*. Drugi je jeseni, ko se dogaja isto. To je *jesensko enakonočje*. Sredi poletja je dan, ko Sonce vzhaja in zahaja najbolj severno, in pozimi dan, ko to počne najbolj južno. To sta *poletni obrat* in *zimski obrat*. Vsi ti dnevi so dobrodošel povod za velika slavja.

3.5 Nebesna telesa

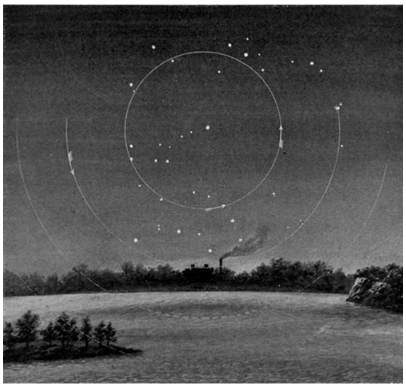
Mesec

Ponoči in včasih podnevi vidimo na nebu *Mesec*. Kakor Sonce tudi sam vzhaja, se giblje od vzhoda proti zahodu in zahaja. Pri tem od noči do noči počasi spreminja svojo obliko: od polno osvetljenega kroga – ščipa – preko čedalje bolj ozkega krajca do povsem temnega kroga – mlaja – in nazaj. Izboklina krajca je vedno obrnjena proti Soncu; kaže torej, da je Mesec velika krogla, ki ne seva sama, ampak jo osvetljuje Sonce.

Zvezde

Ponoči na nebu miglja množica *zvezd*. Ene so bolj, druge manj svetle. Tudi zvezde sledijo zgledu svojih dveh vzornikov: niso pri miru, ampak se gibljejo od vzhoda proti zahodu. Pri tem ne spreminjajo medsebojne lege, to je, oblika *ozvezdij*, ki jih tvorijo na nebu, se ne spreminja. Južnejša ozvezdja vzhajajo in zahajajo za obzorje. Severnejša pa opisujejo kroge okrog neke odlikovane točke, ki leži natanko nad severom. To je *severni nebesni pol*.

Njemu nasproti, pod obzorjem, leži *južni nebesni pol*. Tudi okrog njega krožijo zvezde, vendar jih ne vidimo, ker so pod obzorjem. Oba nebesna pola povezuje navidezna *nebesna os*. Prav ob severnem polu leži srednje svetla zvezda; ta ostaja pri miru in ponoči kaže, kje je sever. Poimenujemo jo *Severnica*. Tudi druge zvezde in ozvezdja poimenujemo z lepimi imeni. Znameniti ozvezdji sta *Veliki voz* in lepotica *Kasiopeja*, ki obe kažeta proti Severnici, ter lovec *Orion*, ki s svojim pasom kaže vzhod in zahod.



Slika 3.5 Kroženje zvezd okoli severnega nebesnega pola. Blizu pola leži svetla zvezda, Severnica. Pomorščakom in trgovskim karavanam v puščavah je ponoči zanesljiv kažipot. (Comstock, 1903)

Planeti

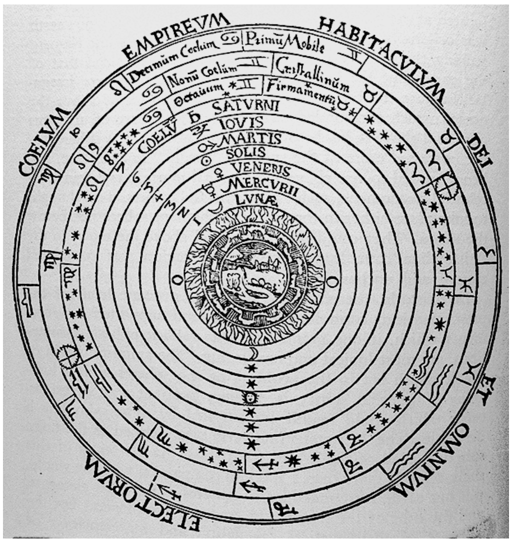
Opazovanja preko zaporednih noči pokažejo, da nekatere zvezde le niso čisto pri miru, ampak počasi spreminjajo svojo lego med preostalimi zvezdami. Takim potujočim zvezdam rečemo *planeti*. Poznamo in sledimo naslednje: *Merkur*, *Venero*, *Mars*, *Jupiter* in *Saturn*. Prva dva se zmeraj držita blizu Sonca in sta vidna le zjutraj pred vzhodom ali zvečer po zahodu, drugi pa tudi sredi noči. Venera je od vseh planetov najsvetlejša in spreminja svoj sijaj.

Sonce, Mesec in zvezde sicer vsi potujejo po nebu od vzhoda proti zahodu, vendar to ni vse. Mesec namreč med zvezdami dodatno in počasi leze od zahoda proti vzhodu: če določene noči vzide (ali kulminira) skupaj z neko zvezdo, bo naslednji dan za njo že kasnil. Pri svoji poti med zvezdami jih včasih tudi pokrije, kar pomeni, da je bližje od njih vseh. Prav tako kasni Mesec za Soncem: ob vsakem naslednjem zahodu Sonca je bolj zadaj. In celo Sonce samo rahlo kasni za zvezdami: ozvezdje, ki v zimskih dneh vzhaja tik po sončnem zahodu, je v pomladnih dneh že visoko na nebu, ko Sonce zaide. Katera ozvezdja so torej ponoči vidna na nebu, je odvisno od letne dobe – poleti so druga kot pozimi.

3.6 Zemljin sistem

Središče sveta

Opisane pojave na nebu si predstavljamo z naslednjo sliko. Zemlja je velika krogla v središču sveta. Okoli nje na različnih razdaljah krožijo nebesna telesa; najprej Mesec, potem notranja planeta Merkur in Venera, nato Sonce, za njim zunanji planeti Mars, Jupiter in Saturn, ter končno zvezde. Mesec in planeti svetijo zaradi odboja Sončeve svetlobe, zvezde pa same. Vsa telesa krožijo okrog osi, ki prebada Zemljo skozi njen severni in južni pol ter se nadaljuje na obeh straneh do ustreznih nebesnih polov med zvezdami. To je *geocentrični model sveta* (PTOLEMAJ).



Slika 3.6 Zemlja kot krogla v središču sveta. Okrog nje krožijo Mesec, Sonce, planeti in zvezde. (Apian, 1524)

Mrki

Mesec, ki je Zemlji najbližji, pride včasih pred Sonce in ga deloma ali povsem zamrači; to je *sončni mrk*. Spet drugikrat pa zaide polni Mesec v senco, ki jo meče Zemlja, obsijana od Sonca. To je *lunin mrk*, delni ali popoln. Senca na Mesecu je vedno okrogla, kar potrjuje, da mora biti okrogla tudi Zemlja. Tudi oba notranja planeta bi morala kdaj "zamračiti" Sonce, vendar sta premajhna za to, na Sončevi ploskvi ju pa zaradi silne bleščave ne moremo videti.

Upoštevajoč vse povedano se zdi, da je geocentrični model sveta kar dober. Ohranili ga bomo, dokler ga morda nova spoznanja ne bodo ovrgla in nadomestila z drugim, boljšim. □

4 Snovi in ogenj

Čiste snovi in zmesi – Spremembe stanja – Gorenje in zrak – Gorljive snovi – Gradbene snovi – Rude in kovine – Druge snovi

4.1 Čiste snovi in zmesi

Zrnatost snovi

Raznovrstnih snovi, iz katerih so sestavljena telesa, je silno mnogo. Nekatere – zrak, voda in sol, ki jo najdemo na obali morja – so videti v vsakem svojem delu enake. Rečemo, da so to *homogene* ali *čiste snovi*. Druge – prst, kamenine in les – pa so videti zrnate ali vlaknate; njihovi sestavni deli se med seboj razlikujejo. Rečemo, da so te snovi *heterogene* oziroma da so *zmesi*.

Ločevanje snovi

Zmes, recimo kup iz prsti in kamenja, lahko ločimo na posamezne sestavine z ročnim odbiranjem, drobljenjem in presejavanjem skozi sito. Lahko jo tudi vržemo v vodo; nekatere snovi pri tem potonejo, druge ne. Temu rečemo ločevanje z usedanjem (sedimentacijo) ali plavanjem (flotacijo). V tekoči vodi po kanalu pa snovi izpiramo: večji in težji delci se potopijo vzdolž toka na dno prej, manjši in lažji pa kasneje. Tako reke ob poplavah zasipavajo svoje bregove.

Vodne raztopine

Morska voda je na pogled homogena. Vemo pa, da vsebuje sol. Voda v obalnih mlakužah, ki jih segreva Sonce, namreč izginja ter za sabo pušča to belo usedlino. Če jo vržemo v "sladko" rečno vodo, sol izgine in voda postane slana. Rečemo, da je slana voda *raztopina*. Postopek, ki ga izvaja narava, si prisvojimo: razne zmesi, recimo slan pesek, mečemo v vodo, pri čemer se nekatere sestavine raztopijo in druge ne; vodo nato precedimo skozi tkanino in dobimo čisto raztopino; to potem postavimo na sonce in počakamo, da se izloči trdna snov.

4.2 Spremembe stanja

Izhlapevanje in kondenzacija

Morska voda, ki izginja iz mlakuž, ne izginja zares, marveč se spremeni v nevidne *hlape* ali *paro*. Pravimo, da voda *izhlapeva*. Čim topleje je, tem bolj izhlapeva. Vodna para pokaže svoj obstoj, ko se v zraku ohladi in zgosti, *kondenzira*, ter tvori oblačne kapljice. Te se debelijo, padajo na tla kot dež, tvorijo reke in se zlivajo nazaj v morje. Spotoma raztapljajo okolišnje snovi in jih odnašajo s seboj. Zato je morje slano.

Taljenje in strjevanje

Pozimi, ko je mrzlo, voda *zmrzne* v led. Ta se s prihodom tople pomladi *stali* nazaj v (tekočo) vodo. Voda torej lahko obstaja kot trdnina, tekočina ali plin. Rečemo, da obstaja v treh *agregatnih stanjih*: trdnem, tekočem in plinastem, odvisno od tega, kako toplo je okolje. Domnevamo, da to velja tudi za druge snovi: v dovolj vročem okolju se kamenine stalijo (kakor kažejo izbruhi vulkanov) in v dovolj hladnem bi se zračni plini, eden ali več, kolikor jih pač že je, utekočinili (kakor kaže vodna para).

4.3 Gorenje in zrak

Ogenj Kadar udari strela v drevo, pogosto zaneti *ogenj*. Tega so se že naši davni predniki naučili ustvariti z drgnjenjem dveh kosov lesa ali s kresanjem dveh primernih kamnov (kremena in pirita), ki vržeta iskre na posušeno gobo. Delanje ognja je ena izmed najpomembnejših človekovih iznajdb. Brez tega bi še vedno živeli kot živali.

Slika 4.1 Ogenj, morda največja iznajdba človešva. Prižigati so se ga naučili vsi lovci in nabiralci. Prižgana drva gorijo s svetlimi in vročimi plameni ter se spreminjajo v pepel in dim. (Anon)

Prižgan les gori, to je, ovije se v ognjen plašč, ki oddaja svetlobo in toploto. Pri tem les izginja in na koncu preostane le pepel. Za gorenje je potreben zrak: več ko ga dovajamo s pihanjem ali pahljanjem, močneje gori. Če kurimo v zaprtem prostoru, začne ogenj sčasoma slabeti in zrak postaja čedalje slabši za dihanje. Predstavljamo si, da se pri gorenju porablja zrak ali neka njegova plinasta sestavina, iz gorljivih snovi v lesu pa nastaja en ali več plinov, ki se mešajo nazaj v zrak.

4.4 Gorljive snovi

Oglje Kadar ogenj ne zgori popolnoma, ostanejo v njem črni kosi lesa, *oglje*. Shranjeno in nato ponovno uporabljeno oglje je odlično gorivo: žari, močno greje in ne daje skoraj nobenega dima oziroma pepela. Zdi se, kot da je bil kos lesa, iz katerega je oglje nastalo, v ognju očiščen vse "nesnage", ki se je izločila kot plini in pepel, in je preostala le ena čista snov, *ogljik*. Že prvi kmetovalci so oglje pridobivali s kurjenjem lesa v kopah, pokritih z vlažno zemljo.

Premog Je poleg lesa še kakšno gorivo v naravi? V zemlji ponekod najdemo plasti rjavega in črnega *premoga*. Zdi se, da je to nekak potemnel les od dreves, ki so nekoč rasla, pa jih je podrla in prekrila povodenj ter jih pokopala pod zemljo. Premog je precej boljše gorivo od lesa, saj daje več toplote. Tudi iz njega lahko z nepopolnim kurjenjem v kopah pridobimo oglje; rečemo mu *koks*.

Žveplo Blizu vulkanov ali v podzemnih jamah najdemo med kamninami lepe rumene kristale ali kepe. To je *žveplo*. Gori z modrim plamenom, pri tem oddaja smrdeč plin in za sabo ne pušča pepela. Zdrobljeno v prah pobija škodljive glive in žuželke na poljščinah. Zmešano z oljem (ki ga dobimo s stiskanjem oliv) je tudi dobro zdravilo proti glivičnim obolenjem kože. Večje količine najpreprosteje pridobimo tako, da zažgemo z žveplom pomešan kup kamnin; nekateri kosi žvepla začno goreti, drugi kosi se pri tem stalijo, odtečejo v podnožni jarek in se nato tam strdijo.

4.5 Gradbene snovi

Keramika

Ko z *glino* obložimo ognjišče, da bi se ogenj ne širil, odkrijemo, da nastanejo iz nje trdi, rdeči kosi. To je *keramika*. Od tod do izdelave keramičnih loncev je le korak. Žgana glinasta posoda je zelo primerna za shranjevanje marsičesa in tudi za kuhanje, čeprav je žal porozna in počasi prepušča vodo. Žgane opeke pa so dobre za gradnjo hiš. Če med žganjem v peč vržemo raztopino morske soli, se žgana posoda obda z glazuro in ne prepušča več vode.

Apno

Tudi kos *apnenca*, ki se znajde v ognju, doživi spremembo. Postane prhek bel kamen. Če tega vržemo v vodo, se burno odzove: hlastno jo vsrkava in se močno greje, dokler se na koncu ne spremeni v vlažno kepasto maso. To sta *živo apno* in *gašeno apno*. Gašeno apno, vzeto iz vode, na zraku sčasoma otrdi v kamen. To izkoriščamo za gradnjo hiš. Z gašenim apnom premažemo stene. Premaz sčasoma otrdi v belo skorjo. Gašeno apno tudi mešamo s peskom in dobljeno *malto* uporabimo za povezovanje kamnov ali žganih opek v stene hiš.

4.6 Rude in kovine

Baker

Kamnine so zmesi iz različnih homogenih *rudnin* (mineralov); ti imajo dostikrat obliko večjih ali manjših *kristalov*. Nekatere rudnine, pomešane z ogljem v zaprti keramični peči in segrevane z gorenjem pri dnu, se stalijo in iz peči izteka žareča tekočina, ki se strdi v rdeč *baker*. Surovi kosi bakra se dajo kasneje taliti, ulivati v glinaste kalupe, kovati in oblikovati v razna orodja in orožja. Tako pridobimo novo, umetno ustvarjeno snov za svoje potrebe. Z bakrenimi dleti, na primer, klešemo kamnite bloke za stavbe. Žal je baker za učinkovito uporabo preveč mehek.

Bron

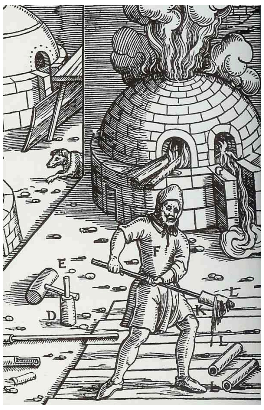
Iz drugih rudnin na enak način pridobimo *cink* in *kositer*; oba sta siva in dokaj mehka. Vse naštete pridobljene snovi so si podobne po lesku in kovnosti ter jih zato poimenujemo *kovine*. Rudnine, ki vsebujejo kovine, pa imenujemo *rude*. Ko iz radovednosti ali po nesreči zmešamo tekoči baker in tekoči cink, dobimo nekaj novega, rumen *bron*, ki je mnogo trši od svojih sestavin in zato bolj primeren za izdelke. Rečemo, da je bron *zlitina* iz dveh kovin. Če zlijemo baker in kositer, pa dobimo rumeno *medenino*, ki je zelo podobna bronu. Dočim se baker, cink in kositer na zraku sčasoma prevlečejo s temnejšo povrhnjico, ohranjata obe omenjeni zlitini svoj sijaj.

Železo

Z močnim koksovim ognjem, ki ga podpihujemo z mehovi, iz ustrezne rude pridobimo še eno kovino – sivo *železo*. Surovo železo je mehko. Moramo ga spet segreti, da zažari, ga kovati in nato na hitro potopiti v mrzlo vodo, da otrdi. Rečemo, da smo ga *kalili*. Če ga pred kaljenjem še žarečega porinemo v ogleni prah, se navzame nekaj oglja in postane *jeklo*. Odvisno od vsebnosti oglja so nekatera jekla trda in krhka, druga mehkejša in prožna. Železo in jeklo postaneta sčasoma temelj civilizacije: iz njiju izdelujemo vse od igel do mostov. Železo na zraku in vlagi žal rjavi (pokrije se z rdečo skorjo), zato ga je treba mazati z oljem, ki obema preprečuje dostop.

Svinec

Od kovin, pridobljenih iz rud, sta znamenita še *svinec* in *živo srebro*. Prvi je svetlosiv, mehek in težek, ne rjavi in je uporaben za grezila ter vodovodne cevi. Druga kovina pa je bleščeče siva in – presenetljivo – pri navadni temperaturi tekoča. Hraniti jo moramo v zaprtih posodah, ker počasi hlapi in so njeni hlapi strupeni.



Slika 4.2 Pridobivanje kovin iz rud z ognjem. V peči iz opeke je ruda, pomešana z ogljem. Staljena kovina izteka skozi spodnja vrata. (Agricola, 1556)

Iz mnogih rud pri praženju z ogljem ne dobimo kovin, ampak oddajajo prav takšen plin kot goreče žveplo. Očitno te rude vsebujejo žveplo. Če jih najprej pražimo na odprtem ognju z velikim dotokom svežega zraka, žvepleni plini izpuhtijo; preostalo rudo, ki je sedaj videti drugačna, pa spet talimo v zaprtih pečeh z ogljem ali koksom in dobimo ven kovine. Tako pridobivamo skoraj vse že omenjene kovine. Obe skupini rud poimenujemo *oksidne* in *sulfidne* rude, posamezne rude pa, na primer, bakrov oksid, živosrebrni oksid, železov sulfid in podobno.

4.7 Druge snovi

Pepelika in soda

Kakor se v rudah skrivajo kovine, tako se morda kaj koristnega skriva tudi v pepelu, ki ostane po gorenju lesa. Pepel damo v posodo, polijemo z vrelo vodo in precedimo skozi krpo. Dobljeno čisto raztopino izparevamo in res dobimo trdo belo snov – *pepeliko*. Vodna raztopina pepelike ima lužnat okus in topi maščobe: v njej peremo obleko. Iz pepela morskih alg pa na enak način dobimo pepeliki podobno snov – *sodo*.

Pranje obleke, pri čemer prideta v stik pepelika in maščoba, nam da misliti. V topli vodi raztopimo pepeliko in ji primešamo olje ali živalsko mast. Nastane nekakšna zgoščenina. Vlijemo jo v kalupe in pokrijemo z rjuho, da se ne ohlaja prehitro. Po primernem času jo vzamemo ven, razrežemo na kose in posušimo. Dobimo milo in večno hvaležnost gospodinj.

Steklo

Zgodba pravi, da so nekoč trgovci na peščeni obali kuhali večerjo in ker niso imeli kamnov za podstavek, so za to uporabili kar kose pepelike. Presenečeni so ugotovili, da se je pesek ob ognju stalil v neko prozorno snov. Omenjeni dogodek kaže, kam in kako naprej. Kot radovedni ali dobičkaželjni lončarji ali kovači – morda najeti od trgovcev – s poskusi doženemo, da je najbolje, če v keramičnem ali železnem kotlu močno segrevamo zdrobljeno zmes pepelike (ali sode), apnenca in kremenčevega peska, vse v primernem razmerju (ki naj bo poslovna skrivnost). Ko se takšna zmes stali in nato ohladi, nastane dobro *steklo*. Pepelika da brezbarvno steklo in soda zelenega. Žarečo stekleno maso lahko valjamo v šipe ali z železno cevjo napihujemo v posodo. Tako človeštvo poleg kovin dobi še eno pomembno snov.

Ko na trebušasto stekleno vazo z vodo sije sonce, se prepuščeni žarki zbirajo v svetlo liso na podlagi. Prej ali slej mora nekdo to opaziti. In tedaj se pojavi želja: morda bi lahko zbrali vse žarke v eni sami točki, kjer bo gotovo postalo zelo vroče? Z nekaj poskušanja ugotovimo, da to zmore kar navadna steklena krogla. Še bolj priročna je krogelna kapica ali okrogla *leča*. Takšna leča omogoči nadvse udobno prižiganje ognja.

Guma

V tropskih gozdovih rastejo drevesa, ki cedijo belo tekočino, če jih zarežemo. Ko se ta tekočina strdi, postane zelo elastičen *kavčuk*. Žal je surovi kavčuk na vročini lepljiv in na mrazu krhek. Morda bi pomagalo, če mu dodamo kakšno "zdravilno" snov? S poskušanjem res najdemo rešitev: kavčuk zmešamo z žveplom in ga segrevamo, najbolje v zaprti posodi z vročo paro. Nastane "vulkanizirana" *guma*. Z različnimi dodatki, recimo s sajami ali cinkovim oksidom, dobimo različne vrste gum. Med drugim so primerne kot tesnila za steklene kozarce za dolgotrajno shranjevanje hrane.

Z naštetim pridobivanjem kovin in drugih koristnih snovi, ki jih v naravi ne najdemo, si človeštvo postavi dobro osnovo za udobno življenje in za svoj nadaljnji razvoj. □

5 Ulomna števila

Deli celote – Ulomki – Računanje z ulomki – Decimalna števila – Računanje z decimalnimi števili

5.1 Deli celote

Pri gradnji templjev se svečeniki srečajo z mnogimi težavami. Med drugim morajo učinkovito načrtovati prehrano za delavce. Tipična prehrana so hlebci kruha ali sira in te je treba rezati na kose, jih razdeljevati ter o vsem voditi evidenco.

Rezanje hlebca

Kot svečeniki in pisarji (AHMES) se izziva lotimo postopno. Začnemo z najpreprostejšim primerom – z enim samim hlebcem. V mislih ali zares ga prerežemo na dva enaka kosa in enega ali oba položimo v košaro. Rečemo, da vsebuje košara eno ali dve *polovici* hlebca. Seveda lahko hlebec razrežemo tudi na drugačno število enakih kosov, na primer na tri, in potem v košaro denemo eno, dve ali tri *tretjine* hlebca. Kosi kruha v košari so množica, katere elementi niso več enote (hlebci), pač pa deli te enote (kosi hlebca). Velikost omenjenih množic zapišemo kot 1/2, 2/2, 1/3, 2/3 ali 3/3. Spodnje število pove, o kakšnih delih celote je govora, in zgornje, koliko je teh delov.

5.2 Ulomki

Ulomna števila

Nasploh lahko hlebec razrežemo na m enakih kosov in jih n položimo v košaro. Rekli bomo, da je v njej n/m hlebca in zapisani izraz proglasili za *ulomno število* oziroma *ulomek*. Z naravnimi števili opisujemo, koliko je v množici celih enot, z ulomnimi števili pa, koliko je njihovih delov. Tako štejemo, na primer, osminke hlebca kruha ali četrtinke vrča piva. Število m poimenujemo *imenovalec* in število n *števec* ulomka. Imenovalec pove, o kakšnih delih celote je govora, in števec, koliko je teh delov. Števec je lahko manjši, enak ali večji od imenovalca. V prvem primeru rečemo, da je ulomek *pravi*, in v drugih dveh, da je *nepravi*. Nepravi ulomek skriva v sebi eno ali več celih enot. Koliko jih je, določimo z deljenjem števca z imenovalcem: količnik pove število celih enot in preostanek pove število pravih ulomnih enot. Tako, na primer, velja $22/7 = 3 + 1/7$, kar na kratko zapišemo kot $3^1/_7$. Rekli bomo, da je to "mešano" število.

Razširjanje in krajšanje

Naj bo v košari n/m hlebca, torej n kosov, od katerih je vsak velik m-tino hlebca. Ko vsak kos kruha v košari razrežemo na k delov, dobimo $k \cdot n$ kosov, od katerih je vsak velik $(k \cdot m)$-tino hlebca, in velja izrek o *širjenju* oziroma *krajšanju* ulomkov:

$$\frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{k \cdot m}\,. \tag{5.1}$$

Ulomek se torej ne spremeni, če števec in imenovalec pomnožimo ali delimo z istim številom. Tako ulomek 6/10, na primer, zgoraj in spodaj delimo s številom 2 in dobimo lepšo obliko 3/5. Rečemo, da smo ulomek okrajšali.

Velikost ulomkov

Kakor je kos hlebca manjši od celega hlebca, tako je tudi vsak pravi ulomek očitno "manjši" od enote. Ulomkom kot novi zvrsti števil torej lahko pripišemo velikost. Od dveh ulomkov, ki imata enak imenovalec, je tisti z večjim števcem očitno večji. Kadar sta imenovalca različna, pa moramo oba ulomka razširiti v obliko z enakim imenovalcem; v najslabšem primeru je to produkt obeh izvornih imenovalcev. Potem tudi zanju postane razvidno, kateri je večji oziroma manjši.

5.3 Računanje z ulomki

Seštevanje in odštevanje

Združevanje kosov kruha iz dveh košar nas navaja na naslednjo definicijo seštevanja ulomkov: dva ulomka z istim imenovalcem se seštejeta tako, da se seštejeta oba števca, imenovalec pa pridrži. Kadar imata ulomka različne imenovalce, ju je potrebno najprej pretvoriti na skupni imenovalec. Podobno vodi odvzemanje kosov kruha iz košare do definicije za odštevanje ulomkov. Tako velja:

$$\frac{k}{m} \pm \frac{l}{m} = \frac{k \pm l}{m} \tag{5.2}$$
$$\frac{k}{m} \pm \frac{l}{n} = \frac{kn \pm lm}{mn} \; .$$

Množenje

Združevanje k košar, od katerih je v vsaki n/m hlebca, vodi do skupka

$$k \cdot \frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{m} \; ; \tag{5.3}$$

s tem smo definirali množenje ulomka z naravnim številom.

Razdelitev n/m hlebca na l delov izvedemo tako, da razdelimo vsak kos posebej in dobimo $(n/m):l = (n:l)/m$. Ker n v splošnem ni deljiv z l brez ostanka, razširimo zapisani ulomek s faktorjem l v obliko $(n{:}l)/m = n/(ml)$. S tem smo definirali deljenje ulomka z naravnim številom:

$$\frac{n}{m} : l = \frac{n}{ml} \; . \tag{5.4}$$

Ker ulomek k/l pomeni hkrati množenje enote s k in njeno deljenje z l, je ustrezno definirano tudi množenje ulomkov:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{k}{l} = \frac{nk}{ml} \; . \tag{5.5}$$

Deljenje

Definirati hočemo še deljenje ulomkov n/m in k/l. Oba ulomka najprej razširimo na skupni imenovalec: nl/ml in mk/ml. Ker je imenovalec pri obeh enak, je očitno, da mora biti kvocient ulomkov kar enak kvocientu števcev: nl/mk. V tem kvocientu prepoznamo produkt prvega ulomka z "obrnjenim" drugim ulomkom. Tako torej velja

$$\frac{n}{m} : \frac{k}{l} = \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{k} \,. \tag{5.6}$$

S tem je deljenje opredeljeno kar preko množenja.

Računski zakoni

Ulomki so razširitev naravnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer, ko je imenovalec enak ena, na primer $3 = 3/1$. Računske operacije nad njimi so – zaradi privzetih definicij – podložne istim zakonom (2.1) kot pri naravnih številih: vsota in produkt ulomkov sta komutativna in aditivna, produkt pa je še distributiven glede na vsoto. Poljubno ulomno število bomo odslej, kadar bo to potrebno, označevali s črkami p, q ali r.

5.4 Decimalna števila

Desetiški ulomki

Med ulomki so nekaj posebnega tisti, ki imajo za imenovalec 10, 100, 1000 in tako naprej. Imenujemo jih *desetiške ulomke*. Desetiški ulomki kar kličejo po tem, da jih zapišemo na podoben način, kakor naravna števila. Slednja zapisujemo z enicami E, deseticami D, stoticami S, tisočicami T itd; zakaj torej ne bi prvih zapisovali z desetinami d, stotinami s, tisočinami t itd? Drugače rečeno: naravna števila v desetiškem zapisu $TSDE$ razširimo z dodanim ulomnim delom v obliko $TSDE{,}dst$. Tako na primer zapišemo $3/10 = 0{,}3$, $5/100 = 0{,}05$ in $35/100 = 3/10 + 5/100 = 0{,}35$. Zapis opremimo z vejico, da ločimo celi del od ulomnega. To je *decimalni zapis* ulomkov in števila z decimalno vejico so *decimalna števila*. Številkam, ki sledijo decimalni vejici, rečemo *decimalke*.

Nedesetiški ulomki

Kaj pa nedesetiški ulomki? Tak ulomek poskušamo spremeniti v desetiškega z razširjanjem. Ker so vse desetiške enote sestavljene zgolj iz faktorjev 2 in 5 ($10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$), je razširjanje mogoče le, če je tudi imenovalec sestavljen samo iz faktorjev 2 in 5. Tako, na primer, velja $1/2 = 5/10 = 0{,}5$ in $3/25 = 12/100 = 0{,}12$. V ostalih primerih se je treba zadovoljiti s približno pretvorbo na željeno število decimalk. Zgled, na dve decimalki, je: $2/7 = (2/100) \cdot (100/7) \approx (2/100) \cdot 14 = 0{,}28$. Zadnja decimalka je negotova za $\pm\, 0{,}01$.

5.5 Računanje z decimalnimi števili

Ker so decimalna števila zapisana v mestnem desetiškem sistemu, računamo z njimi prav tako kot z naravnimi števili, le na decimalno vejico moramo paziti.

Seštevanje in odštevanje

Pri seštevanju poravnamo obe števili glede na decimalno vejico in seštevamo, kot da vejic ne bi bilo. V rezultatu potem postavimo vejico pod obe obstoječi. Podobno ravnamo pri odštevanju.

Množenje

Pred množenjem dveh števil (v mislih) premaknemo decimalno vejico v prvem faktorju za toliko mest v desno, da ta postane naravno število, in prav tako naredimo v drugem faktorju. Tako smo nakazani produkt množili z dvema desetiškima enotama. Nato oba faktorja zmnožimo, ne meneč se za "izginuli" decimalni vejici. Izračunani produkt, ki je naravno število, moramo sedaj le še deliti z obema desetiškima enotama, da dobi pravo vrednost. To naredimo tako, da vanj postavimo decimalno vejico za toliko mest v levo, kolikor decimalk imata oba faktorja skupaj.

Deljenje

Delimo tako, da najprej v delitelju premaknemo decimalno vejico za toliko mest v desno, da postane naravno število, in za prav toliko premaknemo tudi vejico v deljencu. S tem smo obe števili pomnožili z isto desetiško enoto in vrednosti količnika nismo spremenili. Nato števili delimo in ko pridemo do koraka, da moramo k tekočemu ostanku pripisati desetine, to v nastajajočem količniku obeležimo z vejico. Deljenje nadaljujemo, dokler ostanek ne postane nič oziroma ko dosežemo željeno število decimalk.

Računski zakoni

Decimalna števila niso nič drugega kot (pravi ali nepravi) desetiški ulomki, zapisani v mestnem zapisu. Zato za računske operacije nad njimi – seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje – veljajo isti zakoni kot za operacije nad kakršnimikoli ulomki, torej navsezadnje tisti zakoni (2.1), ki veljajo za operacije nad naravnimi števili. Decimalna števila so razširitev naravnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer z "neskončno" ničlami za decimalno vejico, na primer $3 = 3{,}0\ldots$ Tudi poljubno decimalno število bomo odslej, kadar bo to potrebno, označevali s črkami p, q ali r. □

6 Potence in koreni

Desetiške potence – Nenatančna števila – Potence – Koreni – Obrestni račun – Obrestno obrestni račun

6.1 Desetiške potence

Desetiške potence

Ko države rastejo, imajo njihovi uradniki opravka s čedalje večjimi števili. Pri tem se pojavi naslednja težava. Desetiške enote 10, 100, 1000 in naprej je čedalje težje pisati in brati, čim več ničel vsebujejo. Zato jih, kot domiselni uradniki, zapišemo na kratko v obliki 10, 10^2, 10^3 in tako dalje. Izraz 10^n pove, da je to desetiška enota, ki vsebuje n ničel. Hkrati je tudi okrajšava za produkt n enakih faktorjev 10. Število 10^n poimenujemo *desetiško potenco* in število n njen *eksponent*. Kot posebna primera zapišemo še $10^1 = 10$ in $10^0 = 1$.

Eksponentni zapis števil

Z desetiškimi potencami lahko na kratko in bolj pregledno zapišemo tudi druga velika števila. Tako, na primer, zapišemo število 1 600 000 kot $1{,}6 \cdot 10^6$. Podobno velja za majhna števila, recimo $0{,}0016 = 1{,}6/10^3$. Obakrat smo število zapisali kot produkt ali kvocient decimalnega števila in ustrezno velike desetiške potence. Rekli bomo, da je to *eksponentni zapis* števila. Najbolj pregledno je izbrati tak zapis, da znaša prvi faktor med ena in deset, eksponent pa je temu prilagojen. Dobro je tudi tako, da je eksponent omejen na mnogokratnik števila 3 ter prvi faktor ustrezno prilagojen.

Eksponentni zapis števil precej olajša računanje z njimi. Seštevamo tako, da vsa števila zapišemo z istimi desetiškimi potencami, nakar to potenco izpostavimo in seštejemo preostanek. Podobno ravnamo pri odštevanju. Pri množenju pa preprosto seštejemo eksponente in pri deljenju jih odštejemo oziroma okrajšamo: $10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$ in $10^3/10^2 = 10^{3-2} = 10$.

6.2 Nenatančna števila

Napake pri štetju

Število ljudi v veliki državi gre v milijone. Kot državni pisarji jih moramo občasno prešteti. Pri tem ne gre brez napak: ene ljudi spregledamo, drugi se poskrijejo, tretji spet vmes umrejo, se rodijo, priselijo ali odselijo, delne vsote iz posamičnih pokrajin se narobe seštejejo in še marsikaj drugega se lahko zgodi. Število, do katerega po mukotrpnem delu pridemo, torej nikakor ni natančno. Pri štetju več milijonov ljudi so dobljene enice, desetice, stotice in verjetno celo tisočice nezanesljive. Kar je višjih enot, pa pričakujemo, da so zanesljive.

Značilne številke

Postavimo si odlično pravilo, da bomo pri rezultatu štetja ljudi (ali česarkoli drugega) zapisali le *zanesljiva mesta*. Tako zapišemo, na primer, 3 602 ooo: na nezanesljiva mesta smo postavili majhne ničle. Še boljši je eksponentni zapis: $3{,}602 \cdot 10^6$. Prvi faktor vsebuje zgolj zanesljiva mesta; ta so štiri. Več ko je zanesljivih mest, bolj natančno je število poznano.

Pri določanju, koliko zanesljivih mest vsebuje zapisano število, se ravnamo po naslednjih pravilih. — Vse neničelne številke so značilne. — Ničle med dvema neničelnima številkama so značilne. — Vodeče ničle niso značilne. — Repne ničle v naravnem številu so značilne, če so pisane z veliko ničlo, in neznačilne, če so pisane z majhno ničlo. — Repne ničle v decimalnem številu so značilne: 3,1 ni isto kot 3,10; prvo število je natančno zgolj na desetine, drugo pa na stotine. — Naravno število s samimi značilnimi številkami ustreza decimalnemu številu z neskončnim repom decimalnih ničel: 12 je isto kot 12,0…

Zaokroževanje števil

Kadar pri zelo natančnem številu – takšnem, ki ima veliko značilnih mest – dvomimo o zanesljivosti repnih številk, ali kadar nas ne zanimajo, jih preprosto odrežemo. Če je prva odrezana številka manjša od pet, pustimo zadnjo neodrezano številko nespremenjeno, sicer pa jo povečamo za ena. Rečemo, da smo število *zaokrožili*. Na ta način pri rezanju repa pridelamo najmanjšo napako.

Okrajšano računanje

Pri računanju z nenatančnimi števili v eksponentnem zapisu moramo paziti, da v rezultatu ne pridelamo večje natančnosti, kot jo dovoljujejo izvorna števila. Tako ima vsota le toliko značilnih decimalk, kot jih ima sumand z najmanjšim številom decimalk. Vsoto moramo zato primerno okrajšati. Še bolje pa je, da že pred začetkom seštevanja zaokrožimo ustrezni sumand. Za razliko velja isto. Produkt ima toliko značilnih mest, kolikor jih ima faktor z najmanjšim številom značilnih mest. Tudi v tem primeru moramo produkt ustrezno okrajšati ali pa že pred množenjem ustrezno okrajšamo preveč natančni faktor. Za kvocient velja isto. Pri vseh krajšanjih pred dejanskim računanjem je najbolje, da krajšamo na eno mesto manj, kot je potrebno, in šele rezultat dokončno in pravilno zaokrožimo.

6.3 Potence

Naravna potenca

Kar velja za potence števila 10, posplošimo za poljubno število p: produkt n enakih števil p na kratko zapišemo kot

$$pp \dots p = p^n \tag{6.1}$$

in poimenujemo n-ta *potenca* števila p. S tem je definirano potenciranje števila. Rečemo, da je p *osnova (koren)* potence, n pa njen *eksponent (logaritem)*. Dober zgled je rezanje hlebca: koliko kosov nastane, ko ga prerežemo na pol, nato polovici spet na pol in tako dalje, skupaj štirikrat? Toliko: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Računska pravila

Iz definicije potence takoj sledijo naslednji izreki za računanje z njimi:

$$p^m p^n = p^{m+n} \tag{6.2}$$
$$\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n}$$
$$(pq)^n = p^n q^n$$
$$(\frac{p}{q})^n = \frac{p^n}{q^n}$$
$$(p^m)^n = p^{mn}.$$

Seveda veljata še posebna primera $p^1 = p$ in $p^0 = 1$. Odštevanje eksponentov je smiselno le, če je števec večji od imenovalca.

6.4 Koreni

Obrat potence

Potenciranje števila R na eksponent n je računska operacija, ki iz števila R naredi novo število, namreč $R^n = N$. Rečemo, da številu R "pripada" število N, ali da se R "preslika" v N: $R \rightarrow N$. Z enako pravico lahko tudi rečemo, da številu N pripada R, oziroma da se N preslika v R: $R \leftarrow N$. Vendar obstaja pomembna razlika med obema preslikavama. Če poznamo R, lahko N takoj izračunamo – tako, da ga pač n-krat množimo samega s sabo. Če poznamo N, pa pripadajočega R ne znamo neposredno izračunati. Lahko pa ga seveda poimenujemo: rekli mu bomo *koren* in zapisali ${}^n\sqrt{N} = R$. Velja torej:

$$R^n = N \Longleftrightarrow R = {}^n\sqrt{N}. \tag{6.3}$$

Zapis ${}^n\sqrt{N}$ je hkrati oznaka števila, ki potencirano da N: $({}^n\sqrt{N})^n = N$, je pa tudi oznaka posebne "operacije" – *korenjenja* – nad številom N.

Izračun korena

Poimenovanje korena kot ${}^n\sqrt{N}$ seveda še ni noben dokaz, da takšno število tudi obstaja, in še manj navodilo, kako ga najdemo. Vemo pa tole: čim večje je število, tem večja je njegova potenca, zato velja tudi: čim večje je število, tem večji je njegov koren. To izkoristimo za organizirano *ugibanje* iskanega korena. Izberemo primeren *približek* in ga potenciramo. Če dobimo preveč, izberemo ustrezno manjši približek, sicer večjega. Tako nadaljujemo, dokler ne pridelamo zadovoljive rešitve. Na ta način izračunamo, na primer, ${}^2\sqrt{2} = 1{,}41$ in ${}^2\sqrt{3} = 1{,}73$. Namesto znaka ${}^2\sqrt{}$ bomo odslej pisali kar $\sqrt{}$.

Za drugi koren iz N iznajdemo tudi naslednje dobro organizirano ugibanje. Izberemo začetni približek R_0 tako, da je $R_0{}^2$ blizu N. Naslednji boljši približek je $R_1 = (R_0 + N/R_0)/2$. Postopek ponavljamo in se hitro bližamo pravemu R.

Računska pravila

Koreni so v tesni zvezi s potencami. Pravzaprav je korenjenje obratna operacija k potenciranju. Od tod izvlečemo več pravil za računanje:

$$(\sqrt[n]{p})^n = \sqrt[n]{(p^n)} = p \tag{6.4}$$
$$\sqrt[n]{p^m} = \sqrt[kn]{p^{km}}$$
$$\sqrt[n]{(pq)} = \sqrt[n]{p}\,\sqrt[n]{q}$$
$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} = \sqrt[nm]{p}\,.$$

Z uporabo teh pravil si dostikrat olajšamo računanje. Podkorensko število, na primer, zapišemo kot produkt faktorjev in korenimo vsakega posebej: $\sqrt{6} = \sqrt{(2 \cdot 3)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

6.5 Obrestni račun

Obrestna enačba

Razmah trgovine vodi do kovanega denarja in nekateri trgovci močno obogatijo. Drugi, ki nimajo denarja, a ga potrebujejo, si ga izposodijo pri bogataših. Pri tem obljubijo, da bodo izposojeni denar – *glavnico* G – čez nekaj časa vrnili, hkrati pa dodali še nekaj dodatnega denarja – *obresti* R – kot plačilo za uslugo. Ponavadi znašajo obresti določen delež glavnice: $R = npG$, pri čemer je n število let od posojila do vrnitve in p letna *obrestna mera*. Za več let kot si izposojamo, več denarja K bomo morali vrniti: $K = G + R$, torej $K = G + npG$, to je

$$K = G(1 + np)\,. \tag{6.5}$$

Zapisana *obrestna enačba* pove, kako izračunati *neznano količino* (*neznanko*) K, če poznamo *znane količine* (*parametre*) G, n in p. Tipična obrestna mera znaša $p = 0{,}05$. Če si izposodimo $G = 100$ denarjev za $n = 5$ let, moramo tedaj vrniti $K = 100(1 + 5 \cdot 0{,}05)$ denarjev, torej $K = 125$ denarjev. Očitno se posojilodajalcu izplača dajati posojila in pri tem bogateti brez dela. Tako se v družbi pojavijo poklicni posojilodajalci, bankirji.

Ugibanje neznanke

Kaj pa, če se – kot bankirji – vprašamo: kakšno obrestno mero p moramo zaračunati, če hočemo v 5 letih za posojilo 100 denarjev dobiti vrnjenih 150 denarjev? Za ta primer se obrestna enačba zapiše v obliki $150 = 100(1 + 5p)$ z neznanko p. Neznanka sedaj ne stoji sama na eni strani enačbe, ampak je zlepljena v nekakšen številski grozd. Naša naloga je, da določimo, za katero številsko vrednost neznanke je enačba *izpolnjena*, to je, da je njena leva stran enaka desni.

Enačbo lahko rešimo s poskušanjem: "v škatlico" p vstavljamo razna števila in pogledamo, ali so prava. Ugotovimo, da je takšno število 0,10. Tako smo našli *rešitev enačbe*; enačbo smo *rešili*.

Izračun neznanke

Morda lahko enačbo rešimo, ne da bi ugibali? To bi bilo vsekakor krasno. Postopamo takole. Levo in desno stran delimo s 100. S tem se enačba ne spremeni, vendar smo se na desni strani znebili enega faktorja in neznanko delno ogolili. Potem od leve in desne strani odštejemo 1; spet se enačba ne spremeni in neznanka se še bolj ogoli. Končno obe strani delimo s 5, ju zamenjamo med seboj (levo prestavimo na desno in desno na levo) ter dobimo rešitev: $p = (150/100 - 1)/5 = 0{,}10$.

Pravzaprav ni treba, da računamo s konkretnimi števili, ampak lahko rokujemo kar s splošnimi. Tedaj dobimo rešitev v obliki $p = (K/G - 1)/n$. Šele sedaj vstavimo konkretne vrednosti parametrov in dobimo konkreten rezultat. Tako vidimo, da z reševanjem splošne enačbe pravzaprav rešujemo neskončno množico konkretnih enačb – za vsak številski nabor parametrov po eno. Seveda lahko vsako količino v obrestni enačbi – K, G, n ali p – po potrebi obravnavamo kot neznanko in jo izrazimo s preostalimi. V vseh primerih nam to uspe. Izumili smo "algebrsko" reševanje enačb.

6.6 Obrestno obrestni račun

Obrestno obrestna enačba

Bankirji, ki dajo posojilo G, terjajo vrnitev kapitala K po znani obrestni enačbi (6.5). S tem pa niso zadovoljni. Pohlepno iščejo način, kako povečati dobiček. Razmišljajo takole. Ko sem A-ju posodil glavnico G po obrestni meri p za n let, sem se po prvem letu pravzaprav odrekel razpolaganju z $G(1 + p)$ denarja, kolikor bi ga dobil, če bi dal le enoletno posojilo. Ta denar bi lahko posodil B-ju in v naslednjem letu zaslužil $G(1 + p)(1 + p)$ denarja. Pravično je torej, da A-ju posojam tako, da nisem na opisani izgubi, torej pod pogojem, da po n letih vrne

$$K = G(1 + p)^n \,. \tag{6.6}$$

To je *obrestno obrestna enačba*. Koliko je poštena, ne bomo razglabljali. Dejstvo je, da predpisuje, kako izračunati K iz znanih G, n in p. Zmeraj naračuna več kot navadna obrestna enačba. Razlika je tem večja, čim bolj dolgoročno je posojilo. Marsikaterega dolžnika je spravila na kant ali celo na drugi svet.

Izračun neznank

Obrestno obrestna enačba povezuje štiri količine. Katerakoli izmed njih je lahko neznanka – odvisno pač od tega, kaj nas zanima. Pričakujemo, da je vsako mogoče eksplicitno izraziti s preostalimi tremi. Neznanka K je tako že izražena. Neznanko G izračunamo z deljenjem obeh strani enačbe: $G = K/(1 + p)^n$. Neznanko p izluščimo z obojestranskim deljenjem, korenjenjem in odštevanjem: $p = {}^n\sqrt{(K/G)} - 1$. Neznanke n pa se zaenkrat ne znamo lotiti.

Vrste enačb

Glede na to, katero "neznanko x" – K, G, p ali n – preučujemo, zavzame obrestno obrestna enačba eno izmed naslednjih treh oblik: $Ax = B$, $Ax^n = B$ in $A^x = B$. Prvo obliko imenujemo *linearna enačba*; drugi obliki rečemo *potenčna enačba*, ker neznanka nastopa kot osnova potence; in tretjo obliko, v kateri je neznanka eksponent potence, krstimo za *eksponentno enačbo*. Kako kakšno izmed teh enačb rešimo, že vemo: na obe strani vplivamo enako in sicer tako, da na eni strani pridelamo golo neznanko x. Za linearno enačbo dobimo $x = B/A$; za potenčno $x = {}^n\sqrt{(B/A)}$; za eksponentno enačbo pa bomo morali ustrezne računske operacije še odkriti oziroma izumiti. □

7 Čas in kot

Nebesni čas – Kotomerni krog – Deklinacija Sonca – Sončna ura – Nihalna ura – Časovna anomalija Sonca – Zvezdno nebo – Sonce in zvezde – Zemljepisna lega – Časovni pasovi

7.1 Nebesni čas

Merjenje časa

Sonce vzhaja, kulminira in zahaja; Mesec raste in upada; zasnežene zime nastopajo in minevajo. Med začetkom in koncem kakšnega dogajanja, recimo potovanja trgovske karavane preko puščave ali ladje preko morja, se zvrsti določeno število "sonc", "lun" ali "zim". Ko jih preštejemo, s tem trajanje/čas potovanja *izmerimo*. *Merilna priprava* je nebo, *merske enote* pa *dan* (d), *mesec* (mes) in *leto* (y). Zapis 5 d, na primer, bomo razumeli kot produkt merskega števila 5 in merske enote d, torej kot $5 \cdot \mathrm{d}$.

Časovna lega

Vsako dogajanje je omejeno z dvema dogodkoma: z njegovim začetkom in s koncem. Tudi med poljubnima dvema nepovezanima dogodkoma, recimo med rojstvom preroka Ješue (dogodek A) in smrtjo preroka Mohameda (dogodek B), potekajo razna dogajanja, to je kakršnokoli zaporedje sprememb v nas samih in v okolici. Rekli bomo, da čas teče. S tem hočemo na kratko povedati zgolj to, da se nam svet kaže kot zaporedje dogodkov. Ko izmerimo trajanje med dvema dogodkoma, s tem določimo, *kdaj* se je dogodek B zgodil z ozirom na dogodek A, to je, določimo njegovo *časovno lego*. Tako rečemo, da se je dogodek B zgodil 632 let po dogodku A, med obema dogodkoma pa je preteklo 632 let časa.

Razmerja enot

V mesecu je mnogo dni in v letu je mnogo mesecev in še več dni. Merjeno z dnevi so vsi meseci in vsa leta enako veliki: naštejemo 30 ± 1 dni v posamičnem mesecu in 365 ± 1 dni v posamičnem letu. Mesec merimo med dvema polnima menama, leto pa med dvema pomladnima enakonočjema. Nenatančnost pri merjenju izvira od tega, ker je težko določiti, na kateri dan je mena oziroma enakonočje. Lahko pa si pomagamo tako, da štejemo preko mnogo mesecev in let: v 100 mesecih naštejemo 2953 ± 1 dni in v 100 letih 36524 ± 1 dni. Tako vidimo, da je pravzaprav v mesecu 29,53 dni in v letu 365,24 dni, oboje z natančnostjo na dve decimalki.

Civilno leto

Za civilne potrebe proglasimo 365 dni za eno *civilno leto*, ki se začne, na primer, ob pomladnem enakonočju. Po nekaj civilnih letih pa seveda opazimo, da se prvi dan takega leta odmakne nazaj od pomladnega enakonočja za enega ali celo za več dni. Da ohranjamo začetek vsakega civilnega leta na dan pomladnega enakonočja ali vsaj v neposredni bližini, moramo zato civilnemu letu občasno dodati kakšen dan. V 100 letih moramo tako dodati 24 dni. Najbolje je, da vsakemu četrtemu civilnemu letu dodamo

1 dan; tako postane *prestopno* civilno leto s 366 dnevi. Vsakemu stotemu letu pa tega dne ne dodamo.

7.2 Kotomerni krog

Merjenje kota

Ob kulminaciji stoji Sonce včasih nižje in drugič višje nad južnim obzorjem. Dve namišljeni premici iz naših oči – do obzorja in do Sonca nad njim – oblikujeta navpični kot, ki je bolj ali manj razprt. Po tem kotu lahko zaporedno polagamo palce ali dlani iztegnjene roke in jih štejemo. Tako kot izmerimo. Podobno merimo tudi vodoravne kote po obzorju, recimo med jugom in vzhajališčem ali zahajališčem Sonca.

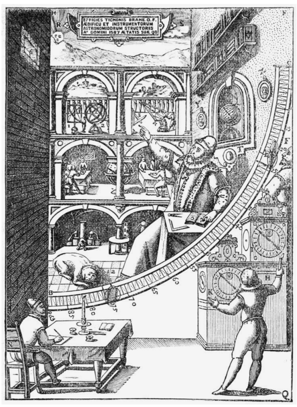
Astrolab

Za natančno merjenje kotov izdelamo *kotomer*: poljubno velik krog z vrtljivo namerilno palico skozi središče. Če ga lahko obesimo, mu rečemo *astrolab*. Njegov obod razdelimo na 360 *kotnih stopinj* (°). Ena stopinja, to je približno polovica širine palca na iztegnjeni roki. Z bistrim očesom razločujemo še kot 1/60 stopinje; poimenujemo ga *kotno minuto* (′).

Slika 7.1 Astrolab – viseči krog z namerilno palico za merjenje višine nebesnih teles nad obzorjem. Prikazana je replika instrumenta, ki je služil španskim jadrnicam pri prvih čezoceanskih plovbah. (National Maritime Museum, Greenwich)

Kvadrant

Namesto celotnega kroga je včasih bolj primerno uporabiti le njegovo četrtino. To je *kvadrant*.



Slika 7.2 Kvadrant – četrtina kotomernega kroga. Prikazan je velik zidni kvadrant, ki je stalno usmerjen proti jugu. S takim instrumentom se da meriti kotne višine Sonca, zvezd in planetov na ± 0,1° natančno. (Brache, 1598)

Za hitro in približno merjenje pa še naprej uporabljamo kar iztegnjeno roko: palec pokriva kot 2°, pest 8° in pedenj med palcem in mezincem 20°.

7.3 Deklinacija Sonca

Višina kulminacij

Zidni kvadrant, postavljen v smeri sever-jug, postane osnovni merilnik v nebesnih opazovalnicah po svetu. Zamislimo si, da smo v opazovalnici v Ljubljani! Tam izmerimo, da *kulminacijske višine* Sonca H nihajo med 20,4° in 67,4°. Drugače rečeno: kulminacije nihajo okrog srednje vrednosti H_0, ki znaša (20,4° + 67,4°)/2, torej 43,9°, za največ 23,5° navzgor (poleti) in navzdol (pozimi).

Kot H_0 poimenujemo *srednjo višino* Sonca. Odklon Sonca od srednje višine – navzgor ali navzdol – poimenujemo *deklinacijo* δ Sonca. Z njeno pomočjo natančneje določimo enakonočja in obrate. Obrat je na tisti dan, ko je opoldanska deklinacija največja ali najmanjša. Enakonočje pa je na tisti dan, ko je opoldanska deklinacija najbližja nič. V dnevih okrog enakonočja se spreminja deklinacija Sonca za 0,4° na dan. Na dan, ki ga proglasimo za enakonočje, je torej opoldanska deklinacija največ ± 0,2° odmaknjena od srednje višine.

Tabela deklinacij

Za vsak poldan v letu, začenši s pomladnim enakonočjem kot prvim dnevom, deklinacijo izmerimo in tabeliramo. To storimo v štirih zaporednih letih. V teh letnih tabelah se deklinacije na vsak izbrani dan med seboj rahlo razlikujejo. Smiselno je izračunati povprečne deklinacije, to je njihovo vsoto, deljeno s štiri.

Tabela 7.1 Povprečna deklinacija Sonca (δ) za izbrane dneve (N) v letu. Dan 0 je pomladno enakonočje. Povprečenje je izvedeno preko štirih zaporednih let. Znak N pomeni odmik navzgor (proti severu) od srednje vrednosti in znak S odmik navzdol (proti jugu) od nje.

N	δ [°]	N	δ [°]	N	δ [°]	N	δ [°]
0	0,0	113	22,1 N	187	0,2 S	295	22,1 S
1	0,4 N	125	20,0 N	192	2,2 S	306	20,1 S
6	2,4 N	133	18,2 N	197	4,1 S	314	18,2 S
11	4,3 N	141	16,0 N	202	6,0 S	321	16,2 S
16	6,2 N	147	14,3 N	208	8,3 S	327	14,4 S
21	8,1 N	153	12,3 N	213	10,1 S	333	12,3 S
27	10,3 N	159	10,3 N	219	12,2 S	339	10,1 S
32	12,0 N	165	8,2 N	225	14,2 S	345	8,1 S
39	14,3 N	170	6,3 N	231	16,1 S	350	6,3 S
45	16,1 N	176	4,0 N	238	18,1 S	355	4,3 S
53	18,2 N	181	2,1 N	246	20,0 S	360	2,4 S
61	20,1 N	185	0,6 N	257	22,0 S	364	0,8 S
73	22,1 N	186	0,2 N	276	23,4 S	365	0,4 S
92	23,4 N			277	23,4 S		
93	23,4 N						

Povprečne deklinacije so dober pokazatelj dejanskih deklinacij. Slednje se od povprečnih razlikujejo največ za $\pm 0{,}2°$ (okrog enakonočij) oziroma za $\pm 0{,}0°$ okrog obratov. Tiste dneve, ki niso zajeti v tabeli, določimo z *interpolacijo*. Primer: kolikšna je deklinacija na dan 221? Na dan 219 je 12,2 S; na dan 225 je 14,2 S. V 6 dneh se torej zniža za 2,0; v 2 dneh za $(2/6) \cdot 2{,}0 = 0{,}7$. Zato znaša $12{,}2\,\mathrm{S} + 0{,}7 = 12{,}9\,\mathrm{S}$.

Višina kulminacije Sonca H je torej odvisna od dneva N v letu. Simbolično zapišemo

$$H = H_0 \pm \delta(N)\,. \tag{7.1}$$

Oznaka $\delta(N)$ pomeni deklinacijo na dan N; njeno številsko vrednost razberemo iz deklinacijske tabele. Tabela se počasi spreminja: v stoletju se spremeni manj kot za desetinko stopinje.

7.4 Sončna ura

Nebesni poldnevnik

Skozi jug, nadglavišče (zenit) in sever poteka nebesni polkrog, ki ga poimenujemo *nebesni poldnevnik* ali nebesni meridian. Sonce ga vsak dan prečka in pri tem kulminira. Pravzaprav je poldnevnik s temi kulminacijami šele določen. Kulminacijska višina H je, kot vemo, vsak dan drugačna. Merimo jo od juga navzgor. Lahko jo pa merimo tudi od zenita navzdol; temu kotu rečemo *zenitna razdalja* Z. Očitno velja

$$H + Z = 90°\,. \tag{7.2}$$

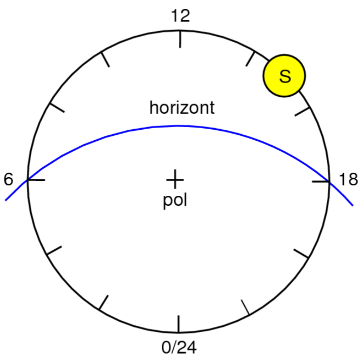
Nebesni ekvator

V enem dnevu zariše Sonce po nebu in pod obzorjem poln krog. Pozimi je krog manjši in poleti je večji. Zdi se, da imajo vsi krogi isto središče, pol, ki leži pod južnim obzorjem. To je južni pol. Nasproti njemu leži na nebu severni pol. Oba pola sta prav tista, okrog katerih krožijo tudi zvezde.

Posebej odlikovan krog je tisti, ki ima vrh pri srednji višini kulminacij Sonca: ta krog namreč poteka tudi skozi vzhodno in zahodno točko na obzorju, tako da ga je natanko polovica nad obzorjem in polovica pod njim. Rečemo mu *nebesni ekvator*. Približno po njem se ob enakonočjih giblje Sonce. Južni pol leži 90° pod vrhom ekvatorja, torej $90° - H_0$ pod obzorjem. Prav toliko nad severnim obzorjem stoji severni pol. Pri nas, v Ljubljani, znaša to 46,1°. Oba kroga – poldnevnik in ekvator – sta togo vezana na obzorje in delita nebo na vzhodno in zahodno ter na severno in južno polovico.

Sonce kot ura

Kot, ki ga Sonce prepotuje okrog južnega pola po kateremkoli krogu, recimo kar po ekvatorju, je merilo za trajanja, ki so krajša od enega dneva. Začenši z najnižjo točko razdelimo cel krog v mislih na 24 delov. Rečemo, da so to *ure* (h) v dnevu.



Slika 7.3 Sončni krog – zamišljeni nebesni krog, po katerem potuje Sonce. Krog ima središče v južnem polu in je razdeljen na 24 delov, ur. Sonce (S) s svojo lego kaže, "koliko je ura". Prikazan je krog ob enakonočju, ko Sonce vzhaja ob 6 h in zahaja ob 18 h.

Senca kot ura

Ker krogov ne moremo zares risati po nebu in ker Sonca ne moremo neposredno opazovati, ker je presvetlo, izdelamo ustrezen model – *sončno uro*. To je palica, usmerjena v južni in severni pol, in pravokotno nanjo nataknjena krožna plošča. Palica meče senco na ploščo in kaže čas (ARISTARH). Poleti je senca na zgornji ploskvi in pozimi na spodnji. Pravzaprav je sončna ura pomanjšana slika okrogle Zemlje – njenega središčnega preseka in polarne osi. Zaradi večje priročnosti lahko krožno ploščo nadomestimo kar s polovico obroča.

Slika 7.4 Ekvatorska sončna ura. Gnomonska palica je usmerjena v severni in južni nebesni pol. Ko nanjo sije Sonce, meče senco na obroč. Tam so narisane in oštevilčene ure. (Hungarian Geographic Museum, Erd)

Urni kot Sonca Ω okrog južnega pola, merjen od zgornje točke naprej ali nazaj, izkoristimo za merjenje časa. Tako definiramo *lokalni sončni čas*

$$LT = 12\,\mathrm{h} \pm \frac{1\,\mathrm{h}}{15°} \cdot \Omega\,. \tag{7.3}$$

Kot seveda merimo na sončni uri. Ob kulminaciji Sonca je $\Omega = 0°$ in zato $LT = 12\,\mathrm{h}$. Ko $\Omega = 90°$ nazaj, pa $LT = 12\,\mathrm{h} - (1\,\mathrm{h}/15°)90° = 6\,\mathrm{h}$.

7.5 Nihalna ura

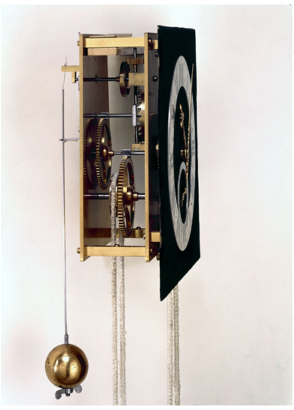
Dolžina dni

Pri merjenju časa smo potiho privzeli, da so vsi dnevi in vse ure enako veliki. Pa je res tako? Tega ne moremo ugotoviti, dokler nebesne ure ne bomo primerjali s kako drugo uro, to je s kakršnokoli pripravo, ki proizvaja zaporedne dogodke. Če se bo pokazala razlika, bomo eno izmed ur proglasili za bolj enakomerno od druge. Slabša bo tista, za katere neenakomernost bomo našli vzrok.

Težno nihalo

Priročen vir zaporednih dogodkov je na vrvico obešeno težko telo, recimo svinčena krogla. Ko jo odmaknemo iz navpične lege in izpustimo, začne nihati sem in tja. Boljša od vrvice je lahka in toga palica: to je *težno nihalo*. Odmiki nihala so enako veliki in nihanje ne zamre, če nihalo sproti vzbuja samo sebe preko primerne povratne vezi do padajoče uteži. Pri tem preko zobatih koles obrača še kazalni števec. To je *nihalna ura* (HUYGENS).

Kako dolg je nihajni čas ure, je odvisno od nastavitve uteži na nihalu: če jo premaknemo proti obesišču, se čas skrajša in obratno. Utež namestimo tako, da števec v enem dnevu – med dvema zaporednima kulminacijama Sonca, kakor ju pokaže sončna ura – odšteje natanko 24 ur, v vsaki uri 60 *minut* (min) in v vsaki minuti 60 *sekund* (s). Ena sekunda, to je približno en utrip človekovega srca.



Slika 7.5 Ura s težnim nihalom. Prikazana je replika prve uporabne nihalne ure, ki jo je skonstruiral C. Huygens. Natančna je bila na eno minuto v enem dnevu. Utež, ki uro poganja, je obešena na vrveh in ni vidna. (Science Museum, London)

Sučno nihalo

Namesto s težnim nihalom na padajočo utež merimo tudi s sučnim nihalom na navito polžasto vzmet (HUYGENS). Taki uri, če je natančna, rečemo *kronometer*. Dovolj majhen je, da ga lahko spravimo v žep. Primerjava sončne in nihalne ure pokaže, da so vsi dnevi v letu – merjeni z nihalno uro – enako dolgi z natančnostjo bolje kot na minuto.

Slika 7.6 Kronometer – ura s sučnim nihalom na polžasto vzmet. Prikazana je replika prvega uporabnega kronometra za morska potovanja, ki ga je izdelal J. Harrison. Natančen je bil na minuto v letu dni. (Royal Observatory, Greenwich)

Nihalna ura omogoči, da ponoči – ko je sončna ura neuporabna – določamo natančne čase kulminacij zvezd, planetov in Meseca, pa tudi mrke in druge nebesne dogodke. Ura tako stopi ob bok kotomeru, s katerim postaneta temeljni par nebesnih merilnikov.

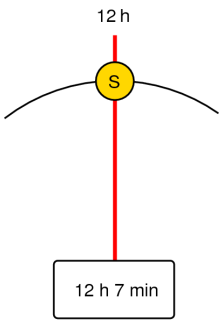
7.6 Časovna anomalija Sonca

Čas kulminacij

Kulminacijo Sonca težko določimo iz sence bolje kot na minuto natančno. Z dvema zaporednima kulminacijama definirane časovne enote – dan, minuta in sekunda – so zato določene z relativno natančnostjo $1 : (24 \cdot 60)$, torej okrog $1 : 10^3$. Za naše potrebe bo to dovolj dobro.

Opoldne na dan pomladnega enakonočja nastavimo odličen kronometer na 12 h 0 min = 12;00 h. (Znak ; pomeni, da ulomni del ure ni zapisan decimalno – z desetinami, stotinami itd. – ampak s šestdesetinami.) Potem ga pustimo teči celo leto. S presenečenjem opazimo, da kulminacija Sonca včasih prehiteva in včasih zaostaja za kronometrovim poldnevom. Drugače rečeno: ko Sonce kulminira, kaže kronometer včasih manj in včasih več kot 12;00 h. Na dan naslednjega pomladnega enakonočja pa spet znaša točno 12;00 h.

Hočemo, da je vsota prehitevanj preko celega leta enaka vsoti kasnitev preko celega leta. To dosežemo tako, da na dan pomladnega enakonočja opoldne (po Soncu) naravnamo lego kronometrovih kazalcev ne na 12;00 h, pač pa na neko drugo vrednost. Pravšnja lega je 12 h 7 min = 12;07 h.



Slika 7.7 Kulminacija Sonca na dan pomladnega enakonočja. Rdeča črta je lokalni poldnevnik. Ob kulminaciji kaže sončna "ura" (po definiciji) čas 12 h, umerjeni kronometer pa čas 12 h 7 min.

Za tako uro rečemo, da kaže *lokalni kronometrski čas LMT* v našem kraju, torej v Ljubljani. Ura in Sonce torej ne "tečeta" enako. Uporaba različnih ur s težnimi in sučnimi nihali pokaže, da je krivo Sonce in ne ure. Sončevi dnevi torej med seboj le niso natančno enaki; njihove razlike, čeravno manjše od minute, se seštevajo in postanejo merljive. Razliko med *LMT* in *LT* poimenujemo *časovna anomalija* Sonca, τ.

Tabela anomalij

Časovno anomalijo izmerimo in tabeliramo za vsak dan v letu z začetkom ob pomladanskem enakonočju. To storimo za več zaporednih let in izmerke povprečimo. Posamične letne tabele se od povprečja razlikujejo manj kot ± 0,5 minute.

Tabela 7.2 Časovna anomalija Sonca (τ) za izbrane dneve (N) v letu. Dan 0 je pomladno enakonočje. Znak E pomeni, da Sonce zaostaja za uro (je vzhodno) in W, da prehiteva uro (je zahodno). Vmesne dneve določimo z interpolacijo.

N	τ [min]	N	τ [min]	N	τ [min]	N	τ [min]
0	7 E	94	2 E	171	2 W	279	0
4	6 E	104	4 E	177	4 W	280	0
11	4 E	118	6 E	182	6 W	284	2 E
18	2 E	127	6 E	188	8 W	288	4 E
25	0 W	137	6 E	194	10 W	292	6 E
26	0 W	149	4 E	200	12 W	297	8 E
36	2 W	157	2 E	208	14 W	303	10 E
56	4 W	164	0	220	16 W	309	12 E
74	2 W	165	0	227	16 W	321	14 E
84	0			235	16 W	327	14 E
85	0			246	14 W	334	14 E
86	0			252	12 W	347	12 E
				258	10 W	356	10 E
				262	8 W	363	8 E
				267	6 W		
				271	4 W		
				275	2 W		

Lokalni kronometrski časi kulminacij Sonca so torej odvisni od dneva N v letu. Simbolično zapišemo

$$LMT = LT \pm \tau(N)\,. \tag{7.4}$$

Oznaka $\tau(N)$ pomeni časovno anomalijo na dan N; njeno številsko vrednost razberemo iz tabele. Ob kulminaciji Sonca na dan 227 torej kaže sončna ura, da je lokalni sončni čas $LT = 12\,\mathrm{h}$, kronometer pa, da je lokalni kronometrski čas $LMT = 11\,\mathrm{h}\,44\,\mathrm{min}$. Sonce prehiteva. Ali obratno: ob "kulminaciji" kronometrske ure je $LMT = 12\,\mathrm{h}$, sončna ura pa kaže $LT = 12\,\mathrm{h}\,16\,\mathrm{min}$. Sonce prehiteva. Tabela se počasi spreminja: v stoletju se spremeni manj kot za minuto.

7.7 Zvezdno nebo

Kroženje zvezd

Ko Sonce zaide, se prikaže na nebu množica zvezd. Kot vemo, krožijo okrog nepremičnega severnega (južnega) pola, prav tistega, okrog katerega kroži Sonce, in pri tem ohranjajo medsebojno lego. Zvezde krožijo po nebu tudi podnevi, vendar jih zaradi Sončeve bleščave ne vidimo. Tiste, ki so blizu severnega pola, opišejo v enem dnevu nad obzorjem poln krog, od katerega je viden le nočni del. Rečemo jim *cirkumpolarne zvezde*. Zvezde na južnem delu neba pa opisujejo nad obzorjem le zgornji del kroga, preostanek pa je pod obzorjem. Te zvezde vzhajajo in zahajajo. Rečemo jim *zvezde vzhajalke*.

Pozimi, ko je noč dolga, kakšna cirkumpolarna zvezda prečka nebesni poldnevnik v temi dvakrat – nad in pod polom. S kvadrantom izmerimo obe višini nad obzorjem in njuna srednja vrednost poda višino pola. V Ljubljani je to 46,1°, kar je isto, kot pravijo meritve Sonca [7.4].

Deklinacija zvezd

Ko zvezda preide poldnevnik nekje med severnim in južnim polom, je za kot δ odmaknjena od nebesnega ekvatorja proti severu ali jugu. Rečemo, da je to njena deklinacija. Deklinacije zvezd se – v nasprotju s Soncem – ne spreminjajo. Vsaka zvezda ima lastno deklinacijo. Za zadnje desno kolo v Velikem vozu, Dubhe, na primer znaša 62° N. Deklinacije lahko zavzemajo vrednosti med 0 in 90° severno ali južno od ekvatorja.

Zvezde kot ura

Kulminacija zvezde se zgodi ob določenem kronometrskem času. Vsaka zvezda ima lastni čas kulminacije. Kronometrski čas med dvema zaporednima kulminacijama iste zvezde poimenujemo *zvezdni dan*, d^*. Ko isto zvezdo opazujemo več dni zapored, opazimo, da kulminira vsak dan okrog 4 minute prej. Njen zvezdni dan je torej za toliko krajši od kronometrskega dneva. To prehitevanje je – za vse zvezde – od dne do dne enako. Od enega enakonočja do drugega naraste za 24 ur, na dan torej $\mathrm{d} - \mathrm{d}^* = 24\,\mathrm{h}/365 = 4\,\mathrm{min}$.

Zvezdni dan (čas med dvema kulminacijama iste zvezde) razdelimo na 24 *zvezdnih ur* (h^*), vsako od njih na 60 *zvezdnih minut* (min^*) in vsako od njih na 60 *zvezdnih sekund* (s^*). Zvezdne časovne enote so za faktor $\mathrm{d}^*/\mathrm{d} = (1440 - 4)\,\mathrm{min}\,/\,1440\,\mathrm{min} = 0{,}997$ "daljše" (torej so krajše) od kronometrskih. In kakor gibanje Sonca po nebu obravnavamo kot sončni časomer, tako lahko gibanje zvezdnega svoda obravnavamo kot zvezdni časomer.

7.8 Sonce in zvezde

Točka Gama

Na dan pomladnega enakonočja kulminira Sonce ob $12\,\mathrm{h} + \tau(0)$ po kronometru. Obenem s Soncem kulminirajo tudi nekatere zvezde, vendar jih ne vidimo. Zamislimo si nevidno zvezdo, imenovano Gama, ki je skrita za Soncem! Ta zvezda, skupaj s pravimi zvezdami, kroži okoli nebesnega pola in kulminira v presledkih enega zvezdnega dne. Na N-ti dan kulminira Gama ob kronometrskem času

$$LMT\,(\gamma) = 12\,\mathrm{h} + \tau(0) - N \cdot (\mathrm{d} - \mathrm{d}^*)\,. \tag{7.5}$$

Zapisani kulminacijski čas je natančen na ± 2 minuti – polovico od 4 minut, kolikor se pač preko ekvinokcijskega dne zakasnjujejo zvezde za Soncem. Na dan, ko hoče računani čas kulminacije pasti pod 0 h, mu dodamo 24 h. Za grobo orientacijo zadostuje dejstvo, da kulminira Gama vsak naslednji mesec dve uri prej. Ob poletnem obratu, na primer, kulminira že ob $12\,\mathrm{h} - 3 \cdot 2\,\mathrm{h} = 6\,\mathrm{h}$ zjutraj.

Rektascenzija zvezd

Ko Gama zapusti kulminacijo in potuje naprej, za njo kulminirajo zvezde druga za drugo. Naj zvezda A kulminira ob času

$$LMT\,(\mathrm{A}) = LMT\,(\gamma) + \alpha\,. \tag{7.6}$$

Potem rečemo, da ima zvezda *rektascenzijo* α. Tako definirano rektascenzijo lahko pustimo v kronometrskih urah ali jo izrazimo v zvezdnih urah. Običajno je slednje; pri tem moramo izmerjene ure ustrezno pretvoriti. V zvezdnih urah ima rektascenzija lepo zaokrožen interval vrednosti med 0 in 24.

Rektascenzijo zvezde določamo po definiciji. Na dan N vemo, kdaj po kronometru kulminira Gama. Izmeriti moramo le čas, ko kulminira zvezda. Seveda lahko določamo rektascenzije le tistih zvezd, ki kulminirajo ponoči. Ko poznamo rektascenzijo kake zvezde, lahko določimo rektascenzijo druge zvezde preprosto z merjenjem časa med obema kulminacijama. Kot primer navedimo, da znaša rektascenzija Dubhe $11\,\mathrm{h}^*\,3\,\mathrm{min}^*$ in torej na začetku pomladi kulminira okrog polnoči.

Rektascenzija zvezde se od leta do leta ne spreminja zaznavno. To pomeni, da je lega Game med zvezdami (kratkoročno) nespremenljiva. Deklinacija in rektascenzija zato skupaj tvorita par, ki enolično opisuje lego zvezde na nebu. Opazovanja preko mnogo let pa kažejo, da se Gama premika proti vzhodu za dobro stopinjo v sto letih.

Ko poznamo rektascenzijo kake zvezde A, lahko na N-ti dan ob njeni kulminaciji po enačbi (7.6) povemo, kakšen je čas. Z naborom primernih zvezd tako nadzorujemo in uravnavamo tek nihalnih ur.

Slika 7.8 Vrtljiva zvezdna karta. Kaže položaj zvezd ob vsaki uri na vsak dan v letu. Nebesni poldnevniki (lege z enako rektascenzijo) so narisani kot premice in nebesni vzporedniki (lege z enako deklinacijo) kot krogi. Črni zaslon z ovalnim oknom in z vrisanimi urami je vrtljiv preko zvezdnega ozadja z vrisanimi dnevi. (Celestial Products)

7.9 Zemljepisna lega

Potovanje z uro

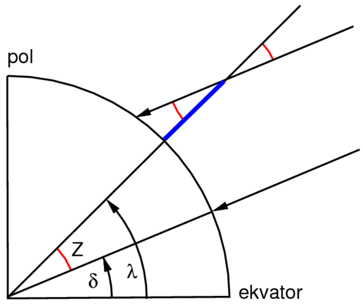
Ko se iz Ljubljane premaknemo proti jugu dovolj daleč v drug kraj, opazimo, da tam Sonce kulminira višje na nebu. Dalje ko potujemo proti jugu, večja je srednja višina kulminacij, nihanje deklinacij okrog nje pa ostaja enako. Podobno je pri potovanju proti vzhodu. Dalje ko potujemo, prej po naši prenosni uri kulminira Sonce, a nihanje anomalij okrog tega časa ostaja nespremenjeno. Vse to potrjuje, da je Zemlja res okrogla. V veljavi ostaja tudi slika, da okrog nje kroži Sonce na veliki oddaljenosti. Obkrožni časi pa niso vedno enaki, kar se kaže kot časovna anomalija. In zveznica Zemlja-Sonce je le ob enakonočjih pravokotna na os kroženja, drugače pa se nagiba proti severu ali jugu, kar se kaže kot deklinacija. Kaj bi bil vzrok takšnemu zapletenemu gibanju, pa slika ne pove.

Zemljepisna širina in dolžina

Z meritivami višin in časov kulminacij Sonca v različnih krajih lahko po Zemlji razpredemo mrežo poldnevnikov in vzporednikov. *Poldnevniki* so glavni krogi skozi oba pola; kraji na njih imajo enak čas kulminacije. *Vzporedniki* so krogi, ki oklepajo os vrtenja. Kraji na njih imajo enako višino kulminacije. Največji vzporednik, ki Zemljo deli na pol, poimenujemo *ekvator*. *Zemljepisno širino* λ opazovališča na severni polobli določimo preko srednje višine kulminacij H_0 kot

$$\lambda = 90° - H_0 \,. \tag{7.7}$$

Na ekvatorju je 0°, na severnem polu 90° in v Ljubljani 46,1°. Geografsko širino najhitreje določimo iz izmerjenega zenitnega kota kulminacije, ki mu prištejemo ali odštejemo deklinacijo za dotični dan. Na južni polobli ravnamo podobno.



Slika 7.9 Določanje zemljepisne širine iz kulminacijske višine Sonca. Čim bolj proti severu gremo, tem niže nad obzorjem kulminira sonce.

Zemljepisno dolžino φ krajev določamo glede na poljubno izbran poldnevnik. Dogovorimo se, da je to poldnevnik skozi opazovalnico v Greenwichu. Meritev dolžine temelji na razliki časov na lokalnem kronometru in na kronometru, prinešenem iz Greenwicha. Za vzhodne kraje velja

$$\varphi = \frac{LMT - GMT}{1\,\mathrm{h}} \cdot 15°\,\mathrm{E}\,. \tag{7.8}$$

Lokalni kronometer pravzaprav ni potreben; zadostuje že greenwiški. Vemo namreč tole. Opazovalec v Greenwichu na dan N izmeri kulminacijo Sonca ob $12\,\mathrm{h} \pm \tau(N)$ po svoji uri. Opazovalec v vzhodnem kraju X pa na isti dan, na "kopiji" greenwiške ure, izmeri kulminacijo Sonca prej: ob $12\,\mathrm{h} \pm \tau(N) - \Delta$. Pri tem $\Delta = LMT - GMT$. Za Ljubljano izmerimo $\Delta = 58\,\mathrm{min}$ in s tem vzhodno zemljepisno dolžino 14,5°. Za kraje zahodno od Greenwicha velja podobno:

$$\varphi = \frac{GMT - LMT}{1\,\mathrm{h}} \cdot 15°\,\mathrm{W}\,. \tag{7.9}$$

Na opisani način so prvi kopenski in morski raziskovalci začrtali zemljevid sveta. Pomorščaki pa še danes tako – z uro, kotomerom in tabelama deklinacije in anomalije Sonca – najpreprosteje določajo lego svojih ladij na odprtem morju.

Slika 7.10 Model zemeljske krogle z vrisanimi poldnevniki in vzporedniki. Poldnevniku skozi Greenwich pripišemo zemljepisno dolžino 0° in ekvatorju zemljepisno širino 0°. Razmak med narisanimi poldnevniki znaša 15° in med vzporedniki 15°. (Anon)

Namesto Sonca lahko za določevanje zemljepisne lege uporabimo katerokoli zvezdo, za katero poznamo deklinacijo in rektascenzijo. Čakamo, da kulminira, in takrat izmerimo njeno kotno višino ter čas po greenwiški uri.

7.10 Časovni pasovi

Uradni časi

V vsakem kraju na Zemlji si lahko mislimo uro, ki kaže tamkajšnji kronometrski čas. Vse te ure tečejo enako hitro, so pa med seboj bolj ali manj zamaknjene. To je zelo neprijetno, saj ima vsak kraj svoj čas. V prakso zato vpeljemo le 24 različnih ur: tiste, ki leže na prav toliko vzporednikih, razmaknjenih po 15° od Greenwicha. Med seboj se razlikujejo natanko za 1 h. Ure v krajih blizu teh poldnevnikov so nastavljene po njih. Rečemo, da tvorijo *časovne pasove*. Ko kaže ura v Greenwichu 12 h, kaže ura v Ljubljani že 12 h + 1 h = 13 h in v New Yorku šele 12 h − 5 h = 7 h. □

8 Prostor

Dolžina – Podobni trikotniki – Pravokotni trikotnik – Krog, lok in kot – Kotna razmerja – Triangulacija – Splošni trikotnik – Zemljemerstvo – Ploščina – Prostornina – Velikost Zemlje – Do nebesnih teles – Sončni sistem

8.1 Dolžina

Merjenje dolžine

Od dveh skupaj rastočih navpičnih dreves je eno krajše, daljše ali enako dolgo kot drugo. Ko kakšno drevo posekamo, pa se lahko vzdolž njega sprehodimo in pri tem štejemo korake. Tako njegovo dolžino l izmerimo. Merilna priprava so naše noge, dolžinska enota pa *korak*. Merimo tudi s *čevlji*, *sežnji*, *lakti*, *pedmi* in *palci*. Pri tem potiho privzamemo, da se uporabljana enota ne spreminja, ko jo premikamo z enega mesta drugam. Takšno merjenje povsem zadostuje lovcem in kmetovalcem.

Metrski etaloni

Z razvojem trgovine se pojavijo zahteve po uradni dolžinski enoti. Različne države izdelajo svoje etalone, to je trpežne palice izbrane dolžine, in jih shranijo v zakladnicah. Z njimi potem uradniki umerjajo druge merilne palice, metre. Tipični etalon je tako dolg kot vstran iztegnjena človeška roka od grodnice do konic prstov. Rekli bomo, da ima dolžino en *meter* (m).

Kratke dolžine merimo tako, da meter – kateregakoli pač že uporabljamo – razdelimo na 3 čevlje in čevelj na 12 palcev. Od daljših enot pa vpeljemo dvojni korak kot 5 čevljev in miljo kot 1000 dvojnih korakov.

Desetiška razdelba

Kmalu se pokaže, da je računanje z mešanimi dolžinskimi enotami nepregledno in težavno, zato raje razdelimo meter na 10 *deci*metrov (dm), 10^2 *centi*metrov (cm) ali 10^3 *mili*metrov (mm). Z njim tudi umerjamo daljše merilne vrvi. Razdaljo 10^3 metrov poimenujemo *kilo*meter (km). Večkilometrske razdalje merimo tako, da namesto polaganja palic po tleh raje vozimo kolo z izmerjenim obsegom in štejemo obrate s primernim števcem. Tako je mnogo bolj udobno.

Če so desetiške enote res tako primerne za računanje, zakaj jih potem nismo vpeljali tudi za čas in kot? V glavnem zato, ker se je merjenje časa in kotov začelo, še preden se je razvil decimalni zapis ulomkov, kasneje pa je bilo zatečeno stanje težko spremeniti. Bili so sicer poskusi, da bi dan razdelili na 10 ur, uro na 100 minut in minuto na 100 sekund, ter da bi četrtino kroga razdelili na 100 stopinj, vendar se žal niso uveljavili.

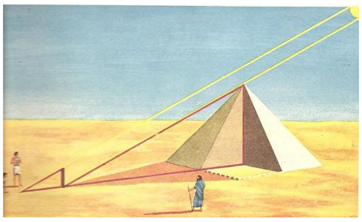
8.2 Podobni trikotniki

Dolžina sence

Navpično drevo in navpični gnomon hkrati mečeta po vodoravnih tleh vsak svojo senco. Drevo je višje od gnomona in meče daljšo senco. Ker so sončni žarki, ki obe senci rišejo, med seboj vzporedni, meče dvakrat višje telo po tleh tudi dvakrat daljšo senco. Drugače rečeno: razmerje med višinama b in b_0 dveh navpičnih teles je enako razmerju med dolžinama a in a_0 njunih vodoravnih senc, v kar se prepričamo z merjenjem:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0}\,. \tag{8.1}$$

Če izmerimo dolžini gnomona in njegove sence, lahko iz izmerjene sence drevesa izračunamo njegovo višino, ne da bi jo bilo treba dejansko meriti z metrsko palico. Rečemo, da smo višino izmerili posredno.



Slika 8.1 Merjenje višine piramide iz dolžine njene sence. Razmerje višin piramide in palice je enako razmerju dolžin njunih senc. (Hogben, 1960)

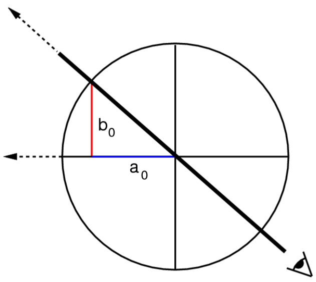
Spoznanje o razmerju višin in senc lahko posplošimo. Drevo, njegova senca in sončni žarki od vrha drevesa do vrha sence tvorijo *pravokotni trikotnik* s stranicami a, b in c. Isto velja za gnomon. Oba trikotnika sta si *podobna*, to je, imata enake kote. Pričakujemo, da so razmerja njunih istoležnih stranic enaka:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0} = \frac{c}{c_0}\,. \tag{8.2}$$

To je *gnomonski izrek*. Velja tudi za poševne trikotnike. Tedaj mu rečemo *izrek o istoležnih stranicah* podobnih trikotnikov (TALES). Trditev dokažemo kar z merjenjem.

Viziranje teles

Ni treba čakati na senco, da ustvarimo podobne trikotnike za meritev višine drevesa. Na primernem mestu zabodemo v tla gnomon, ležemo in poiščemo tisto lego očesa, da se vrh gnomona in vrh drevesa pokrijeta. Rečemo, da smo vrh *vizirali*. Vlogo obeh senc prevzameta sedaj vodoravni oddaljenosti očesa od drevesa in od gnomona.



Slika 8.2 Astrolab kot vizirni trikotnik.

Še bolj priročno je, če namesto gnomona uporabimo astrolab. Postavimo se na primerno mesto in z namerilno palico astrolaba naciljamo vrh drevesa. Pri tem palica na obodu astrolabovega kroga označi točko, ki ima glede na astrolabovo središče vodoravno razdaljo a_0 in navpično razdaljo b_0. Rečemo, da sta to njeni *projekciji*. Projekciji tvorita pravokotni trikotnik, ki je podoben opazovanemu. K izračunani višini drevesa je potrebno dodati še višino astrolaba nad tlemi.

Namesto da po viziranju z astrolabom iz znane oddaljenosti drevesa izračunamo njegovo višino, lahko iz znane višine drevesa izračunamo njegovo oddaljenost. Tako tudi določimo, na primer, oddaljenost ladje na morju iz znane višine njenega jambora, ali oddaljenost ladje do pristanišča iz znane višine tamkajšnjega svetilnika.

8.3 Pravokotni trikotnik

Stranici a in b, ki v trikotniku oblikujeta pravi kot, imenujemo *kateti*. Povezuje ju tretja stranica c, *hipotenuza*, ki je od vseh najdaljša. Vsaka kateta oblikuje s hipotenuzo svoj ostri kot. Kot, ki leži nasproti stranici a, poimenujemo A, onega nasproti b pa B. Z dolžino katet sta oba ostra kota in dolžina hipotenuze enolično določeni.

Vsota kotov

Ko skozi oglišče B potegnemo vzporednico z nasproti ležečo stranico b, nastanejo tam trije koti, ki skupaj tvorijo iztegnjeni kot. Vidimo, da velja:

$$A + B = 90° \,. \tag{8.3}$$

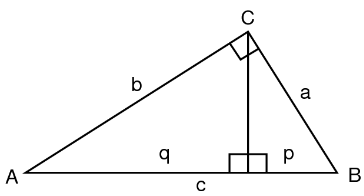
Če torej poznamo en kot, lahko drugega izračunamo.

Dolžina hipotenuze

V kmetijskih državah je potrebno zakoličevati polja. To delajo uradni zemljemerci. Njihovo osnovno orodje je dolga vrv z vozli v metrskih razmikih. Pri merjenjih – kot zemljemerci – opazimo, da je iz vrvi narejen trikotnik, katerega stranice merijo 3, 4 in 5 vozlov, pravokoten. Razmišljajoč o tem odkrijemo povezavo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Mogoče velja takšna povezava za stranice v vsakem pravokotem trikotniku? Domnevamo torej

$$a^2 + b^2 = c^2 \,. \tag{8.4}$$

To je *hipotenuzni izrek* (PITAGORA). Če izrek drži, lahko iz katerekoli dvojice stranic izračunamo tretjo. Domnevo preverimo z meritvami in jo res potrdimo. S tem postane eksperimentalni zakon. Vendar nas to ne zadovoljuje in iščemo pot, kako bi ta zakon izpeljali iz kakšnih bolj osnovnih resnic. To tudi uspemo.



Slika 8.3 Pravokotni trikotnik za izpeljavo hipotenuznega izreka.

Postopamo takole. Iz pravega kota potegnemo navpičnico na hipotenuzo. Nastanejo trije pravokotni trikotniki, ki so si med seboj podobni. Po izreku o istoležnih stranicah (8.2) zato velja

$a/c = p/a$ in $b/c = q/b$. Iz prve enačbe izrazimo a^2, iz druge b^2 ter obe enačbi seštejemo, pri čemer upoštevamo še $p + q = c$. Izrek smo dokazali.

Hipotenuzni izrek vsebuje produkte dolžin samih s seboj, na primer $3\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m}$. V takšnem produktu množimo številske vrednosti med seboj in enote med seboj, torej za navedeni primer $3^2\,\mathrm{m}^2$. Podobno naj velja za deljenje, potenciranje in korenjenje. Izraz $\sqrt{}(25\,\mathrm{m}^2)$, na primer, znaša $5\,\mathrm{m}$.

8.4 Krog, lok in kot

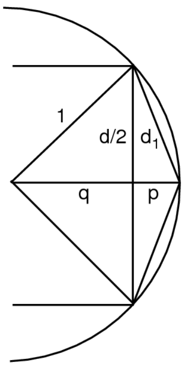
Obseg kroga

Kotomerni krog z večjim polmerom ima večji obseg. Če si mislimo krog sestavljen iz ozkih enakokrakih trikotnikov z vrhovi v središču, se njegovo povečanje pokaže kot podaljšanje krakov teh trikotnikov. Enakokraki trikotnik je sestavljen iz dveh enakih pravokotnih trikotnikov. Vsak podaljšani pravokotni trikotnik je podoben prvotnemu, zato je razmerje njunih kratkih stranic enako razmerju njunih hipotenuz. Če so trikotniki dovolj ozki, je vsota kratkih stranic trikotnikov kar enaka obsegu kroga. Obseg kroga C je zato sorazmeren s polmerom r oziroma s premerom $2r$:

$$C = 2\pi r\,. \tag{8.5}$$

Sorazmernostni koeficient π določimo z neraztegljivo vrvico, ki jo nekajkrat navijemo na okroglo cev znanega premera in ji nato izmerimo dolžino: $\pi \approx 3{,}1$.

Kaj pa, če bi v krog včrtali pravilni mnogokotnik in mu izračunali obseg? Čim več oglišč bi imel tak mnogokotnik, tem manj bi se njegov obseg razlikoval od krogovega. Razmerje med mnogokotnikovim obsegom in premerom pa bi bilo potem dober približek k številu π.



Slika 8.4 Računanje števila π. Čim več oglišč ima krogu včrtani mnogokotnik, tem bolj se njegov obseg približuje obsegu kroga. Z zaporednim razpolavljanjem stranic gradimo čedalje gostejše mnogokotnike.

V krog polmera $r = 1$ včrtamo pravilni četverokotnik, torej kvadrat. Njegova stranica, določena s hipotenuznim izrekom (8.4), znaša $d = \sqrt{2}$ in obseg 4-krat toliko. Ta obseg seveda še ni dovolj blizu krogovemu. Nad kvadratom zato začrtamo dvakrat gostejši mnogokotnik, torej osemkotnik, in skušamo izračunati njegovo stranico d_1 kot boljši približek proti obodu kroga. Ker

$q^2 = 1 - (d/2)^2$, $p = 1 - q$ in $d_1{}^2 = (d/2)^2 + p^2$, velja $d_1{}^2 = 2 - 2\sqrt{(1 - d^2/4)}$. Obseg je 8-krat tolikšen. Uspeli smo. Nova stranica je odvisna samo od prejšnje. Izračunamo jo in postopek ponovimo z novo stranico kot izhodiščem. To nekajkrat ponovimo in dobimo dovolj tesen približek h krogu ter s tem vrednost $\pi = 3{,}14$.

Redefinicija kota

Enačba za obseg kroga (8.5) omogoča, da kot redefiniramo preko razmerja med lokom l in polmerom r krožnega izseka:

$$\varphi = \frac{l}{r}\,. \tag{8.6}$$

Tako definiran kot ima vrednosti med 0 in 2π. Pravi kot znaša $\pi/2$ in iztegnjeni kot je enak π. S tem postane dosedanja stopinja kar okrajšava za število $° = 2\pi/360 \approx 0{,}0175$. Kot ni več neodvisna količina, temveč postane izpeljana.

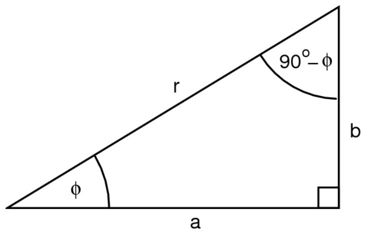
Lastnosti kroga

Ko se ukvarjamo z risanjem krogov in kotov, opazimo marsikakšno zanimivost. — Po obodu kroga nanašamo tetive, ki so enako dolge kot radij. Gre jih natanko šest. Tako krog razdelimo na šest enakih delov. — Nad premerom kroga narišemo trikotnik z vrhom kjerkoli na krožnici. Vsak tak trikotnik je pravokoten. Tako rišemo prave kote. — Nad tetivo narišemo trikotnik z vrhom v središču in drugega z vrhom na obodu. Središčni kot je dvakratnik obodnega. — Skozi tri točke, ki ne ležijo na isti premici, gre natanko en krog: točke povežemo v trikotnik, narišemo simetrale stranic in njihovo presečišče je središče tega kroga. Vse naštete izreke – in še mnoge druge – so ljudje uspeli dokazati, to je, jih izpeljati iz drugih, "bolj osnovnih" resnic (EVKLID). Nam zadostuje, da so eksperimentalno opažena dejstva.

8.5 Kotna razmerja

Kotne projekcije

Ko z astrolabom merimo višino drevesa, moramo določiti obe oddaljenosti (projekciji) a in b točke na obodu astrolabovega kroga s polmerom r od vodoravne in navpične osi skozi središče tega kroga.



Slika 8.5 Vizirni kot in pripadajoči pravokotni trikotnik. Razmerje med nasprotno stranico in hipotenuzo je enolično odvisno od kota.

Sinus, kosinus in tangens

To lahko naredimo vnaprej in enkrat za vselej za vsak kot φ. Najbolje je, da določimo razmerja b/r, a/r in b/a, saj so ta neodvisna od r. Simbolično zapišemo

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi \qquad (8.7)$$
$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$
$$\frac{b}{a} = \tan\varphi\,,$$

s čimer definiramo *sinus*, *kosinus* in *tangens* kota. Sinus kota je torej razmerje med nasprotno stranico in hipotenuzo kateregakoli pravokotnega trikotnika, ki ga zgradimo nad tem kotom. Podobno velja za kosinus in tangens. Vsa tri razmerja poimenujemo s skupnim imenom *kotna razmerja*. Med seboj niso neodvisna, ampak so očitno povezana, upoštevajoč izreka (8.3) in (8.4):

$$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi) \qquad (8.8)$$
$$\cos\varphi = \sin(90° - \varphi)$$
$$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$$
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Določitev kotnih razmerij

Ker kotna razmerja niso odvisna od velikosti kroga, narišemo s šestilom poljubno velik krog na papir, za izbrane kote z ravnilom izmerimo projekcije ter sestavimo ustrezno tabelo. Dovolj je, da izmerimo tabelo za sinus; kosinus in tangens izračunamo iz ustreznih povezav (8.8).

Tabela 8.1 Kotna razmerja za izbrane kote.

°	sin	cos	tan
0	0	1	0
10	0,174	0,985	0,176
20	0,342	0,940	0,364
30	0,500	0,866	0,577
40	0,643	0,766	0,839
45	0,707	0,707	1
50	0,766	0,643	1,19
60	0,866	0,500	1,73
70	0,940	0,342	2,75
80	0,985	0,174	5,67
90	1	0	∞

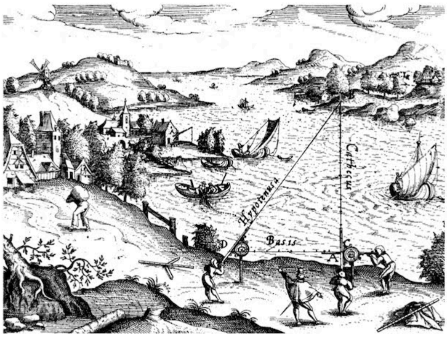
Nekatere vrednosti kotnih razmerij lahko kar uganemo, na primer tiste za sinus kotov 0° in 90°: to sta 0 in 1. Pri kotih 30°, 45° in 60° imamo opravka z enakokrakimi in enakostraničnimi trikotniki, iz katerih razmerja stranic izračunamo; za sinus dobimo 1/2, √2/2 in √3/2.

8.6 Triangulacija

Širina reke

S poznavanjem kotnih razmerij zlahka merimo nedostopne razdalje, recimo širino reke. Ravnamo takole.

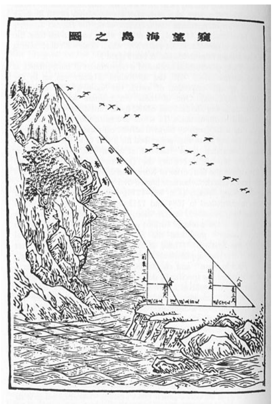
Na nasprotnem bregu poiščemo primerno drevo. Potem na našem bregu izberemo primerno opazovališče in v pravokotni smeri zakoličimo primerno dolgo osnovnico. Nato izmerimo kot, pod katerim vidimo drevo iz drugega krajišča osnovnice. Tangens tega kota pove, koliko je drevo oddaljeno.



Slika 8.6 Merjenje neprehodne razdalje preko reke. Razdalja je izračunljiva, če sta poznana dolžina pravokotne merilne črte – osnovnice – in kot na njenem koncu. (Frisius, 1533)

Višina hriba

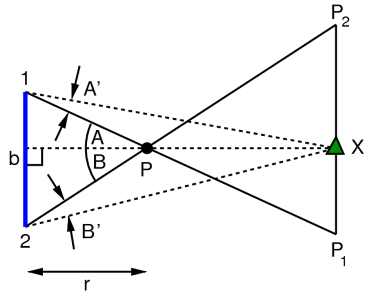
Podobno izmerimo tudi višino nedostopnega hriba. Na ravnini, proč od hriba, izberemo primerno dolgo vodoravno osnovnico d tako, da kaže natanko proti hribu. Iz vsakega krajišča osnovnice nato izmerimo kotno višino hriba. Potreben je še kratek račun in izvemo, koliko je hrib visok: $h/d = \tan\theta_1 \tan\theta_2 / (\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$. Tako z ladje na morju merimo višino vulkanskih otokov.



Slika 8.7 Določanje višine nedostopnega hriba. Potrebna je meritev dolžine osnovnice in dve meritvi kotov, vsaka z enega konca. (Liu Hui, 236)

Zvonik na ozadju

Ko gledamo cerkveni zvonik P iz krajišč 1 in 2 pravokotne osnovnice, vidimo, da je njegova lega na hribovitem ozadju premaknjena. Iz krajišča 1 izmerimo med referentnim hribom X in zvonikom P_1 vodoravni kot A'. Podobno iz krajišča 2 izmerimo med istim referentnim hribom in zvonikom P_2 kot B'.



Slika 8.8 Paralaksa telesa. Iz opazovalnih mest 1 in 2 vidimo opazovano telo P na oddaljenem ozadju v legah P_1 in P_2 glede na referentno telo X.

Če je ozadje mnogo bolj oddaljeno kot zvonik, velja $A \approx A'$ in $B' \approx B$. Vsota $A' + B' \approx A + B = \gamma$ pa je kot, pod katerim iz zvonika vidimo osnovnico. Če je ta kot majhen, to je, če je dolžina osnovnice b mnogo krajša od oddaljenosti r do zvonika, velja

$$\frac{b}{r} = \gamma\,. \tag{8.9}$$

Z meritvijo *paralakse* zvonika γ na oddaljenem ozadju je torej razdalja do zvonika enolično določena. Kadar osnovnica ni pravokotna na vizirno smer, pa moramo izmeriti njen odklon φ od te smeri ter kot dolžino upoštevati projekcijo $b \sin\varphi$.

8.7 Splošni trikotnik

Pri viziranju teles, recimo ladje na morju, ni zmeraj mogoče izbrati osnovnice, ki bi bila pravokotna na vizirno smer. Tedaj je treba uporabiti splošni trikotnik.

Splošni trikotnik s stranicami a, b in c ter z njim nasproti ležečimi koti A, B in C je popolnoma določen, če poznamo: vse tri stranice; dve stranici in kot, ki ga oklepata; ali eno stranico in oba priležna kota. Ugotoviti moramo, kako se iz poljubnih dveh podatkov izračuna tretjega.

Vsota kotov

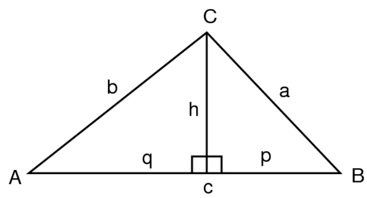
Če skozi ogel B potegnemo vzporednico k nasproti ležeči stranici b, vidimo, da za nastale tri kote velja:

$$A + B + C = 180°\,. \tag{8.10}$$

To je *izrek o vsoti kotov* trikotnika. Če poznamo dva kota, je tretji z njima enolično določen.

Sinusni izrek

Po zgledu hipotenuznega izreka potegnimo pravokotnico h iz oglišča C na stranico c. Rečemo, da je to višina trikotnika nad ustrezno stranico. Prvotni trikotnik razpade na dva pravokotna trikotnika.



Slika 8.9 Trikotnik za izpeljavo sinusnega in kosinusnega izreka.

Velja $\sin A = h/b$ in $\sin B = h/a$. Iz vsake enačbe izrazimo h, ju izenačimo in dobimo (ko postopek ponovimo še na drugih stranicah):

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\,. \tag{8.11}$$

To je *sinusni izrek*. V zapisani obliki velja le, če so vsi koti ostri. Kadar je kakšen notranji kot, recimo A, večji od 90°, moramo namesto sinusa tega kota (ki ni definiran) izračunati sinus "suplementarnega" kota, ki prvega dopolnjuje do 180°: namesto $\sin A$ torej pišemo $\sin(180° - A)$. Izpeljava je podobna.

Kosinusni izrek

V splošnem trikotniku velja $h^2 = a^2 - p^2$ in $h^2 = b^2 - q^2$. Izenačimo desni strani, malo poračunamo, upoštevamo $p + q = c$ in $p = b\cos A$ ter dobimo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,. \tag{8.12}$$

To je *kosinusni izrek*. Iskana stranica je podana z drugima dvema stranicama in s kotom med njima. Seveda velja to za vsako stranico. Izrek velja v zapisani obliki, če je kot A oster. Kadar je treba računati kosinus kota, večjega od 90° (ki ni definiran), računamo kosinus suplementarnega kota in mešani člen prištejemo, ne odštejemo: namesto $-2bc\cos A$ torej pišemo $+2bc\cos(180° - A)$. Izpeljava je podobna.

8.8 Zemljemerstvo

Osnovni trikotnik

Oboroženi z navedenimi izreki določimo oddaljenost hriba takole. Izberemo in neposredno izmerimo primerno osnovnico na ravnini. Nato na vsakem koncu s kotomerom izmerimo vodoravni kot med njo in hribom. Uporabljamo poseben vizir v obliki navpične špranje. Iz obeh kotov po (8.10) izračunamo tretji kot (pod tem kotom iz hriba vidimo osnovnico) in s sinusnim izrekom (8.11) še obe stranici. Z dodatnim merjenjem navpičnih kotov pa določimo še višino hriba.

Mreža trikotnikov

Iz iste osnovnice lahko seveda izmerimo dve ali več tarč, recimo gorskih vrhov v okolici. Ko sta dve tarči izmerjeni, postane njuna medsebojna razdalja nova osnovnica, iz katere lahko nadaljujemo merjenja. Tako razpredemo po okolici mrežo trikotnikov in jo premerimo. To je tudi način, kako države izdelujejo svoje zemljevide.

8.9 Ploščina

Pravokotnik

Kakor polagamo merske daljice vzdolž ravne ceste, tako lahko pravokotno polje v mislih tlakujemo z merskimi kvadrati, to je s pravokotniki, katerih vse stranice so enako dolge. Izberemo kvadrate s tako dolgo stranico l, kakršno natančnost želimo, recimo 1 m. Če znaša dolžina polja a in njegova širina b, ga tlakuje $(a/l)\cdot(b/l)$ kvadratov. Rečemo, da ima polje *ploščino*

$$S = ab\,. \tag{8.13}$$

S tem je definirana tudi enota za ploščino, *kvadratni meter* (m^2). Ploščino vrta $10\,m \times 10\,m = 100\,m^2$ na kratko poimenujemo 1 *ar* in ploščino pašnika $100\,m \times 100\,m = 100\,ar$ poimenujemo 1 *hektar*. Če je ploskev majhna ali če zahtevamo večjo natančnost, merimo z manjšimi enotami, na primer s kvadratnimi decimetri (dm^2). Ni nam treba tlakovati zares, ampak le izmerimo obe stranici ter njuni dolžini zmnožimo.

Pravokotni trikotnik

Po diagonali prerezan pravokotnik razpade na dva enaka pravokotna trikotnika. Ploščina takega trikotnika znaša zato polovico ploščine izvornega pravokotnika:

$$S = \frac{1}{2}\,ab\,. \tag{8.14}$$

Poševni trikotnik

Polje, ki je omejeno s samimi ravnimi črtami, lahko vedno razrežemo na trikotnike, ki pa v splošnem niso pravokotni, marveč poševni. Kakšna je ploščina poševnega trikotnika? Pravokotni trikotnik v mislih razrežemo v ozke pasove, vzporedne z bazo, nato pa jih strižno zamaknemo. Tako iz pravokotnega trikotnika nastane poševni z višino h, ploščina posamičnih trakov in s tem celotna ploščina trikotnika pa se ohrani:

$$S = \frac{1}{2}\,ah\,. \tag{8.15}$$

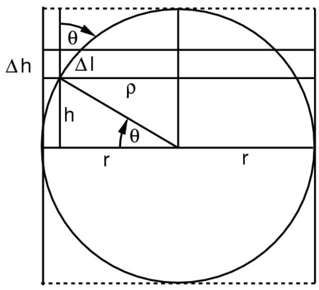
Krog, valj in stožec

Kadar je polje omejeno s krivo črto, ga je treba rezati na zelo drobne pravokotnike ali trikotnike, da dosežemo željeno natančnost. Krog, na primer, razrežemo na ozke enakokrake trikotnike z vrhom v središču in z bazo na krožnici, jih zložimo v kvadrat s stranicama πr in r ter tako dobimo ploščino (ARHIMED).

$$S = \pi r^2\,. \tag{8.16}$$

Plašč valja razvijemo v ravnino. Dobimo pravokotnik s stranicama $2\pi r$ in h ter s tem njegovo ploščino. Tudi plašč stožca lahko razvijemo v ravnino. Nastane izsek kroga z radijem $l^2 = r^2 + h^2$ in kotom $\varphi = 2\pi r/l$. Njegova ploščina je torej $\varphi/2\pi$-ti del od πl^2.

Krogla



Slika 8.10 Računanje površine krogle. Površina krogle je enaka ploščini plašča valja, ki kroglo oklepa.

Površine krogle ne moremo razviti v ravnino. Postopamo takole. Kroglo razrežemo na tanke vodoravne rezine z debelinami Δh. Vsaka rezina ima obliko prisekanega stožca s stranico Δl. Stožec pri elevacijskem kotu θ je na višini $h = r \sin\theta$ nad ekvatorjem krogle ter ima polmer $\rho = r\cos\theta$. Njegova stranica je nagnjena za kot θ od navpičnice.

Če je Δh majhen, je ploščina stožčastega obroča enaka $2\pi\rho \cdot \Delta l$, torej $2\pi r\cos\theta \cdot \Delta h / \cos\theta$ oziroma $2\pi r\Delta h$. To pa ni nič drugega kakor ploščina obroča na plašču valja, ki kroglo oklepa! Vsak obroč na krogli je torej ploščinsko enak ustreznemu obroču na valju! To pomeni, da je površina krogle kar enaka ploščini valja s polmerom r in višino $2r$, torej (ARHIMED)

$$S = 4\pi r^2 . \tag{8.17}$$

Vidimo, da je površina krogle štirikrat tolikšna kot ploščina njenega preseka – kroga – skozi središče.

8.10 Prostornina

Kvader

Skladišče v obliki kvadra lahko v mislih zapolnimo s kockastimi zaboji. Če so stranice skladišča dolge a, b in h, definiramo njegovo *prostornino* kot

$$V = abh . \tag{8.18}$$

S tem je določena tudi njena enota, na primer *kubični meter* (m^3). Manjše prostornine merimo z ustreznimi manjšimi enotami. Enoti $1\,\mathrm{dm}^3$ pravimo tudi *liter*, l.

Piramida

Visoka zgradba, ki jo je najlažje zgraditi, ima obliko "ošpičenega" kvadra; to je piramida. Risba ali model iz lesa pokažeta, da njena prostornina znaša:

$$V = \frac{1}{3}\, abh . \tag{8.19}$$

Poševna piramida ima enako prostornino kot pokončna. Razmislek je prav tak kot pri ploščini poševnega in pravokotnega trikotnika.

Valj, stožec in krogla

Prostor, ki je omejen s krivimi ploskvami, razkosamo na zelo drobne kvadre ali piramide, da dosežemo željeno natančnost, ter seštejemo njihove prostornine. Valj razrežemo na kvadre, stožec na piramide in kroglo na piramide z vrhom v središču ter dobimo (ARHIMED)

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ V &= \frac{1}{3}\,\pi r^2 h \\ V &= \frac{4\pi r^3}{3} . \end{aligned} \tag{8.20}$$

Če v valj, katerega višina je enaka premeru osnovne ploskve, včrtamo kroglo in stožec, je razmerje njihovih prostornin enako 1:2:3. Kaj ni to zanimivo?

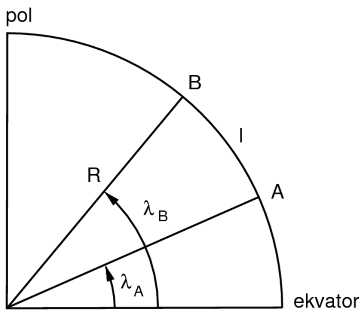
Menzura

Prostornino "nepravilnega" telesa določimo tako, da ga potopimo v valjasto posodo z vodo, menzuro, in izmerimo, koliko se dvigne gladina. S tem je določena prostornina izpodrinjene vode, to je prostornina vrinjenega telesa. Predpostavljamo, da se prostornina vode pri tem ne spreminja.

8.11 Velikost Zemlje

Poldnevniški lok

Kot, pod katerim v mislih iz središča Zemlje s polmerom R vidimo krožni lok l na poljubnem poldnevniku, je enak razliki zemljepisnih širin njegovih krajišč: $l/R = \Delta\lambda$. To nam omogoča, da izmerimo velikost Zemlje. V puščavi izberemo lego severnega krajišča in nato odpotujemo proti jugu za primerno razdaljo. V obeh krajiščih nato z gnomonom izmerimo zemljepisno širino ter izračunamo polmer Zemlje. Dobimo okrog 42oo aktualnih milj (po 1000 dvojnih korakov) (Eratosten).



Slika 8.11 Merjenje velikosti Zemlje. Njen polmer je določen z dolžino loka med dvema geografskima širinama na istem poldnevniku.

Meritev izboljšamo takole. V ne preveč hriboviti pokrajini izberemo severno krajišče. Južno krajišče izberemo s prenosno uro, ki kaže čas severnega krajišča: ko kaže ura poldan z dodano ali odvzeto anomalijo, mora Sonce kulminirati. Vmesni lok med krajiščema pa določimo s triangulacijo na zaporednih trikotnikih. S tem sta določena polmer in obseg Zemlje v aktualnih miljah.

Redefinicija metra

Rezultat uporabimo za novo definicijo metra kot $1/10^6$ dolžine zemeljskega kvadranta, to je četrtine obsega. S tem se znebimo dosedanje navezanosti na človeško velikost. Novi meter se od starih razlikuje za manj kot desetino in ga na novo utelesimo.

Slika 8.12 Meter – palica za merjenje dolžine. Prikazan je javni etalon, izdelan na podlagi meritev poldnevniškega loka skozi Francijo. Etalon je vzidan v pročelje hiše v Parizu. (Anon)

Z novim metrom premerjena Zemlja ima polmer $6{,}4 \cdot 10^3$ kilometrov. Za pomorščake je kot dolžinska enota bolj priročen poldnevniški lok, ki ustreza kotu 1 kotne minute; to je 1 *morska milja* (NM) in znaša 1,8 kilometra.

Morsko obzorje

Zaradi ukrivljenosti Zemlje ne vidimo oddaljenih ladij, ker so skrite pod obzorjem. Prav tako z ladij ne vidimo oddaljenih otokov. Višina h obzorne ravnine nad krogelno morsko gladino z radijem R narašča z oddaljenostjo l: $h = l^2/2R$. Pri razdalji 100 km znaša že 0,8 km. Ladijski opazovalci zato sedijo v košari na jamboru, da vidijo dlje.

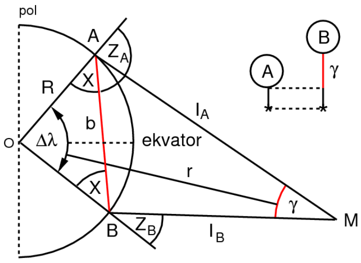
Z gorske višine h vidimo ukrivljeno morsko gladino za kot α pod vodoravnico. Ta kot – depresijo obzorja – zlahka izmerimo z astrolabom. Skica in račun pokažeta, da je z obema količinama takole določen polmer Zemlje: $R/h = \cos\alpha/(1-\cos\alpha)$. Ko z višine 0,8 km izmerimo kot 0,9°, dobimo za radij $6{,}4 \cdot 10^3$ km.

8.12 Do nebesnih teles

Razdalja do Meseca

Kakor merimo oddaljenost zvonika na hribovitem ozadju, tako poskušamo izmeriti oddaljenost Meseca na zvezdnem nebu. Dva opazovalca na istem poldnevniku, med seboj čimbolj oddaljena, opazujeta Mesec ob kulminaciji. Recimo, da istočasno kulminira tudi kakšna zvezda "pod" njim. Opazovalca izmerita navpični kot med to zvezdo in Mesecem. Razlika obeh kotov je kot, za katerega je Mesec premaknjen glede na zvezdno ozadje, torej njegova paralaksa. S paralakso γ in osnovnico b je oddaljenost r enolično določena. Osnovnico najpreprosteje določimo kar z risanjem.

Z nekaj truda lahko osnovnico tudi izračunamo. — Kot X določimo iz vsote notranjih kotov $\Delta\lambda + 2X = 180°$. — Kot Y_A je podan preko suplementarnosti kotov $X + Y_A + Z_A = 180°$. — Osnovnico b določimo iz sinusnega izreka $\sin X/R = \sin\Delta\lambda/b$. — Razdaljo I_B izvemo iz sinusnega izreka $\sin\gamma/b = \sin Y_A/I_B$. — Oddaljenost r pa je, končno, določena s kosinusnim izrekom
$r^2 = I_B{}^2 + R^2 + 2I_B R\cos Z_B$.



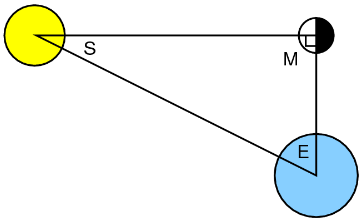
Slika 8.13 Merjenje oddaljenosti Meseca s paralakso.

Meritve so uspešne tudi ob milejših pogojih: z dveh (bližnjih) poldnevnikov in glede na (ne preveč) kasnečo ali prehitevajočo referentno zvezdo. Primeren je tudi Sončev mrk, pri čemer Sonce prevzame vlogo zvezdnega ozadja. Tako dobimo pri osnovnici z redom velikosti Zemljinega polmera paralakso okrog ene kotne stopinje in ugotovimo, da je Mesec oddaljen od Zemlje za 60 njenih polmerov (HIPARH).

Oddaljenost in kotni premer Meseca povesta, kakšna je njegova velikost (8.6). Kotni premer izmerimo neposredno s kotomerom ali preko časa, ki ga potrebuje, da se skrije za navpični rob stavbe. Dobimo 0,5°. Mesec ima zato polmer $1{,}7 \cdot 10^3$ km, torej približno tretjino Zemljinega. Kotni premer se s časom ne spreminja zaznavno, kar pomeni, da se Mesec giblje okrog Zemlje vedno pri enaki oddaljenosti, torej po krogu.

Razdalja do Sonca

Ko Mesec spreminja svoje faze, je enkrat osvetljen natanko do polovice. Takrat tvorijo Zemlja, Sonce in Mesec pravokotni trikotnik s pravim kotom pri Mesecu. Če tedaj uspemo izmeriti kot med Soncem in Mesecem, lahko iz tega izračunamo kot, pod katerim opazovalec na Soncu vidi obe preostali telesi. Kosinus tega kota je enak razmerju oddaljenosti Meseca in Sonca od Zemlje.



Slika 8.14 Merjenje oddaljenosti Sonca. Prikazana je medsebojna lega Zemlje, Sonca in Meseca, kadar je ta osvetljen do polovice. Z merjenjem kota med Soncem in Mesecem je določena tudi razdalja do Sonca.

Meritev potrebnega kota je nenatančna, ker je težko določiti, kdaj je Mesec osvetljen natanko do polovice; ker je ta kot le malo manjši od pravega; in ker majhna merilna napaka pri kotu povzroči veliko napako pri razdalji. Ocenimo, da je iskani kot večji od 87°. Iz tega sledi, da je Sonce od Zemlje oddaljeno najmanj 20-krat toliko kot Mesec (ARISTARH).

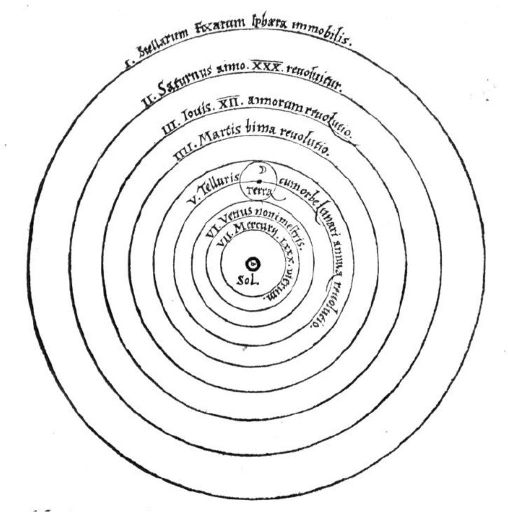
Izmerimo še Sončev premer, podobno kot pri Mesecu. Zaradi varnosti gledamo skozi zakajeno stekleno šipo. Dobimo 0,5°, kar je slučajno enako kot pri Mesecu. To pomeni, da mora biti Sonce vsaj 5-krat večje od Zemlje. Morda je še mnogo večje in mnogo bolj oddaljeno!

8.13 Sončni sistem

Kako lahko okoli majhne Zemlje kroži tako veliko Sonce pri tako veliki oddaljenosti? Saj morajo biti razdalje, ki jih prepotuje v enem dnevu, gromozanske. Mar ni bolj verjetno, da se Zemlja vrti okrog svoje osi in je gibanje Sonca po nebu zgolj navidezno?

Središče sveta

To nas vodi do nove, pravilnejše slike sveta kot *sončnega sistema* (ARISTARH, KOPERNIK). V središču sveta je Sonce. Okrog njega krožijo planeti, vsi v približno isti ravnini, a pri različnih oddaljenostih. Rečemo, da zarisujejo svoje *orbite*. Bližnji planeti obkrožijo Sonce prej kot oddaljeni. Zemlja je tudi planet, tretji po vrsti. Sonce obkroži v enem letu. Pri tem se hkrati vrti okoli svoje osi; en zavrtljaj se kaže kot en dan. Os vrtenja ni pravokotna na ravnino kroženja, marveč nagnjena za 23,5°, in kaže vedno v isto smer med zvezde. S tem so pojasnjene deklinacije Sonca in letne dobe.



Slika 8.15 Heliocentrični sistem sveta. Sonce je v središču, okrog njega krožijo planeti. Luna kroži okoli Zemlje. (Kopernik, 1543)

Okrog Zemlje kroži Mesec. Ko zaide med Zemljo in Sonce, nastane Sončev mrk. Ko zaide za Zemljo, v njeno senco, nastane Mesečev mrk. Morda imajo tudi drugi planeti svoje lune.

Ker je Zemljina orbita velikanska, bi morale zvezde na nebu kazati paralakso. Tega ne opazimo, zato morajo biti silno daleč. Morda so tudi one sonca? □

9 Težnost

Teža in sile – Vzvodna tehtnica – Vzmetna tehtnica – Teža in prostornina – Telo na klancu – Sestavljanje sil – Navor sile in težišče – Delo in težna energija – Dvigalni stroji – Vodno kolo

9.1 Teža in sile

Kamen v roki

Kamen, ki ga položimo na dlan, je težek. Čutimo, kako tišči navzdol z neko *silo*; poimenujemo jo njegova *teža* F_g. Kaže, da je to sila, s katero ga Zemlja privlači k sebi. Če dlan spodmaknemo, začne namreč kamen padati. Dokler ga podpiramo, pa njegovi teži nasprotujemo z drugo silo, s silo dlani F_r nanj. Postuliramo, da sta v mirovanju obe sili (nasprotno) enaki:

$$F_g = F_r \,. \tag{9.1}$$

Od dveh kamnov, ki ju primemo vsakega v eno roko, se zdi eden težji od drugega. Rečemo, da ima večjo težo in drugi manjšo. Tako kamne primerjamo po teži, jih tehtamo.

Akcija in reakcija

Kamen, obešen na vrvici, miruje. Nanj deluje privlačna sila Zemlje F_g navzdol in sila vrvice F_r navzgor. Obe sili delujeta na isto telo – kamen, sta enako veliki in nasprotno usmerjeni. Taki dvojici sil bomo rekli *ravnovesni sili*. Je pa tudi res, da hkrati, ko vleče vrvica kamen navzgor s silo F_{12} (po velikosti enako F_g), vleče tudi kamen vrvico navzdol s silo F_{21} (po velikosti spet enako F_g). Tudi ti dve sili sta zato med seboj enako veliki in nasprotni, vendar delujeta na različni telesi, prva na kamen in druga na vrvico:

$$F_{12} = F_{21} \,. \tag{9.2}$$

Kadar torej deluje eno telo na drugo telo s silo, deluje hkrati tudi drugo telo na prvo telo z nasprotno enako silo. To je *zakon vzajemnega učinka*. Sili imenujemo *akcija* in *reakcija*. Rečemo lahko, da sile nastopajo v parih. Akcije in reakcije ne smemo zamenjevati z ravnovesno dvojico sil.

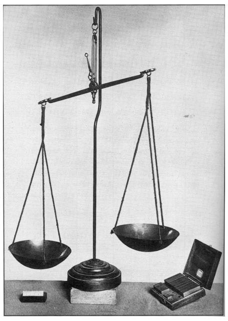
9.2 Vzvodna tehtnica

Ravnovesje tež

Tehtanje z rokami je nezanesljivo. Kot trgovci potrebujemo nekaj boljšega. Uporabimo na sredi podprt drog, *tehtnico*. Podporno točko poiščemo s poskušanjem tako, da je drog vodoraven. Merjenca nato obesimo na vsaki strani podpore pri enakih oddaljenostih. Če je tehtnica v ravnovesju, proglasimo, da sta obe teži enaki. Tako vpeljana teža se pokaže za tranzitivno: če je telo A enako težko kot telo B, in B enako kot C, potem je telo A tudi enako težko kot C. Vse skupaj je neodvisno od tega, iz kakšne snovi so telesa. Tudi se teža ne spreminja, če telo kakorkoli deformiramo. Spremeni se le, če mu dodamo ali odvzamemo kaj snovi.

Enota teže

Za merjenje teže potrebujemo še enoto. Proglasimo, da je to teža kubičnega decimetra – to je litra – vode v Greenwichu in jo poimenujemo *kilopond* (kp). Tisočkrat manjši enoti pa rečemo *pond* (p). Potem tehtamo tako, da merjenec uravnovesimo s potrebno količino vode, pri čemer postuliramo aditivnost teže. Seveda pa je bolj priročno, če namesto vode uporabimo kovinske uteži, ki smo jih predhodno umerili z vodo. Z različno velikimi tehtnicamo določamo teže med $1/10^6$ kp in 10^3 kp.



Slika 9.1 Vzvodna tehtnica – primerjalni merilnik dveh tež. Tehtnica je starodaven izum, poznali so jo že v Mezopotamiji. Prikazana je "lekarniška" tehtnica skupaj z utežmi, ki jo je uporabljal A. Lavoisier. (Musee des Artes et Metiers, Pariz)

Kako tehtamo

Če prazna tehtnica ni v ravnovesju, jo uravnovesimo s primernimi utežmi na lažji merilni posodici ali s posebno drsno utežjo na prečki. Ali sta kraka enako dolga, preverimo tako, da ju obremenimo z enakima utežema; tehtnica mora ostati v ravnovesju. Če kraka nista enako dolga, pa merimo takole zvito: na levo stran položimo merjenec in ga na desni uravnovesimo s pomožno težo, *taro*, recimo s posodo, v katero sipamo pesek. Potem merjenec odstranimo in na njegovo mesto položimo toliko uteži, da se uravnovesijo s taro.

9.3 Vzmetna tehtnica

Spremembe teže

Vzvodna tehtnica meri enakost dveh tež. Poskusi kažejo: če sta teži medsebojno enaki v nekem kraju, sta medsebojno enaki tudi drugod. Ali pa vsaka teža zase ostaja nespremenjena, ne vemo, dokler je ne izmerimo na kak drug, neodvisen način. To naredimo z raztezno vzmetjo, ki jo v poljubnem kraju umerimo z znanimi utežmi. Tako ugotovimo, da je – v okviru natančnosti na 1 odstotek – teža povsod po Zemljini površini enaka.

Slika 9.2 Vzmetna tehtnica – merilnik teže in drugih sil. Daljši ko je raztezek vzmeti, večja je sila. Tehtnico umerimo z znanimi utežmi. Prikazana je prozorna tehtnica za demonstracijske poskuse. (Anon)

9.4 Teža in prostornina

Specifična teža

Dve telesi, uravnovešeni na enakokraki tehtnici, imata enako težo, a se lahko razlikujeta po prostornini: bronasta utež je manj prostorna od kosa lesa, ki ga uravnoveša. Tudi obratno je res: dva kosa snovi z enako prostornino se v splošnem razlikujeta po teži. Rečemo, da ima telo manjšo ali večjo *specifično težo*

$$\sigma = \frac{F_g}{V} . \tag{9.3}$$

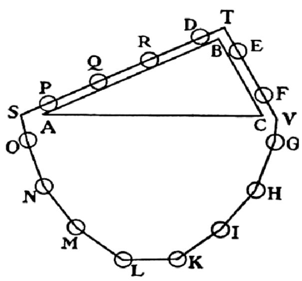
Enota zanjo je razvidna iz definicije, na primer $\mathrm{kp/m^3}$.

Ko stehtamo kos snovi, dobimo njegovo "povprečno" specifično težo. Če je snov homogena, ima vsak njen del enako specifično težo kot celotni kos, sicer pa se lahko od nje razlikuje. Voda je homogena in ima po definiciji specifično težo $1\,\mathrm{kp/dm^3}$. Železo je težje za faktor 7,8, baker za 8,9 in svinec za 11,3. Vse te snovi so "težje" od vode. "Lažji" od nje pa je, na primer, les.

9.5 Telo na klancu

Komponente teže

Voz, privezan za kol na vrhu klanca, vleče navzdol. Čim bolj je klanec strm, s tem večjo silo $F_{g\parallel}$ vleče voz za vrv; na ravnem klancu je ta sila enaka nič in na navpičnem je enaka njegovi teži F_g. Kolikšna je sila pri kotu α? Iskano silo bi lahko neposredno izmerili z vzmetno tehtnico pri različnih kotih. Vendar se nam porodi naslednji miselni poskus (STEVIN).



Slika 9.3 Veriga na klancu. Če ji odrežemo viseči del, ostane v ravnovesju. Vlečna sila členov vzdolž vsakega izmed obeh klancev je zato enaka. (Stevin, 1586.)

Na klanec višine h obesimo sklenjeno členasto verigo. Ta seveda miruje. Nato odstrižemo lok verige pod klancem; s tem ravnovesja ne porušimo. Če je desna stranica navpična, je skupna vleka levih členov vzdolž klanca kar enaka skupni vleki desnih členov navzdol, torej njihovi teži. Število členov vzdolž vsake stranice je sorazmerno z njunima dolžinama. Naj bo teža enega člena enaka F_g in naj vleče vzdolž klanca dolžine l s silo $F_{g\parallel}$. Potem velja $F_{g\parallel} \cdot l = F_{g\parallel} \cdot h/\sin\alpha = F_g\, h$, torej

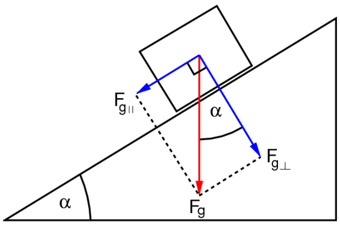
$$F_{g\parallel} = F_g \sin\alpha . \tag{9.4}$$

Poleg tega, da voz nateguje vrv vzporedno s klancem, tudi pritiska pravokotno na klanec s silo $F_{g\perp}$. Neizbežna je misel, da velja:

$$F_{g\perp} = F_g \cos\alpha . \tag{9.5}$$

Pravokotnik sil

Vidimo, da je teža voza *razstavljena* na dve med seboj pravokotni *komponenti*: pravokotno in vzdolžno. Vse tri sile si predstavljamo s puščicami, ki tvorijo *pravokotnik sil*. Dolžine puščic narišemo sorazmerne z velikostjo sil. Pretvorni faktor izberemo priročno, na primer 1 centimeter za 1 kilopond.



Slika 9.4 Voz na klancu. Na voz deluje teža navpično navzdol. Razstavljena je v dve komponenti: ena ($F_{\mathrm{g}\parallel}$) vleče nizdol klanca in druga ($F_{\mathrm{g}\perp}$) pritiska pravokotno nanj.

Velja pa seveda tudi obratno: težo voza lahko formalno obravnavamo kot *sestavljeno* iz obeh komponent in jo poimenujemo njuna *rezultanta*. Po hipotenuznem izreku (8.4) velja

$$F_{\mathrm{g}}{}^2 = F_{\mathrm{g}\parallel}{}^2 + F_{\mathrm{g}\perp}{}^2 \,. \tag{9.6}$$

Sila voza na klanec je spremljana z nasprotno silo klanca na voz; in sila voza na vrv je spremljana z nasprotno silo vrvi na voz. Rezultanta sile vrvi in sile klanca je nasprotno enaka teži voza, kakor tudi mora biti.

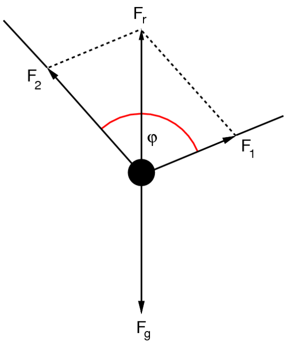
9.6 Sestavljanje sil

Obešeno telo

Če na voz privežemo še eno vrv in jo vlečemo pravokotno proč od klanca z ravno pravšnjo silo, postane klanec odveč in ga lahko odstranimo. Preostane voz, obešen na dveh medsebojno pravokotnih vrveh. Rezultanta sil vrvi je nasprotno enaka teži telesa in je določena z diagonalo pravokotnika sil.

Paralelogram sil

Kaj pa, če vrvi nista pravokotni, marveč tvorita kot φ? Nedvomno je tudi v primeru nepravokotnih vrvnih sil njuna rezultanta nasprotno enaka teži telesa, saj telo miruje; žal pa je ne moremo več izračunati po starem. Pa saj se rešitev ponuja kar sama: obe komponenti sedaj tvorita *paralelogram sil*, in njegova diagonala, če je kaj pravice na svetu, bi morala biti iskana rezultanta.



Slika 9.5 Na dveh vrveh obešeno telo. Sili vrvi sta sestavljeni v rezultanto po paralelogramskem pravilu in ta rezultanta je nasprotno enaka teži telesa.

Diagonalo izrazimo s pomočjo kosinusnega izreka (8.12) kot:

$$F_{\mathrm{r}}{}^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2\,F_1F_2\cos\varphi \,. \tag{9.7}$$

Zapis velja le, če je kot φ oster. Če je kot φ top, mešani člen odštejemo, ne prištejemo: namesto $+2F_1F_2\cos\varphi$ pišemo $-2F_1F_2\cos(180° - \varphi)$. To je *paralelogramsko pravilo* za sestavljanje sil. Ima dva mejna primera, ki ju že poznamo: ko je kot enak 0°, se pravilo poenostavi v seštevanje dveh sil, ko pa je enak 90°, preide v hipotenuzno pravilo. Pravilo je torej "legalna" posplošitev starih spoznanj. Če je tudi "legitimna", pa preverimo in potrdimo z dejanskim merjenjem sil z vzmetnimi tehtnicami.

9.7 Navor sile in težišče

Sila in ročica

Utež na levi ročici tehtnice uravnoveša enaka utež na desni, enako dolgi ročici (pravzaprav je to definicija enakosti za uteži). Levo utež pa lahko uravnovesimo tudi z lažjo desno utežjo, če je ta obešena na daljši ročici. Poskus pokaže, da je takšna raznokraka tehtnica v ravnovesju, če velja

$$r_1F_{g1} = r_2F_{g2}\,. \tag{9.8}$$

To je *zakon vzvoda* (ARHIMED). Hkrati je to tudi izjava o legi podporne točke za sistem dveh uteži, nataknjenih na lahek drog. Z raznokrako tehtnico udobno merimo velike teže.

Slika 9.6 Raznokraka tehtnica. Razmerje dveh sil (tež) je obratno sorazmerno z razmerjem njunih ročic. Za tehtanje je zato dovolj ena sama premična utež. In tehtati je možno zelo velika bremena. Prikazana je tehtnica iz rimske dobe. (Musee du Louvre, Pariz)

Produkt ročice in nanjo pravokotne sile (teže ali vzmeti ali roke) je očitno pomemebna količina; poimenujemo jo *navor*:

$$M = rF_{\perp}\,. \tag{9.9}$$

Pogoj mirovanja

Navor poskuša zavrteti telo okrog osi, pravokotne na ročico in silo. Rečemo, da ima navor smer in si ga – tako kot ročico in silo – predstavljamo s puščico. Smer puščice definiramo kot gibanje desnega svedra, ko ročico zavrtimo v smeri sile. Obremenjen drog torej miruje, če je levosučni navor glede na os vrtenja enak desnosučnemu:

$$M_1 = M_2\,. \tag{9.10}$$

Povedano velja za togo telo poljubne oblike, vrtljivo okrog izbrane osi. Takšni so, na primer, različni vzvodi. Kadar na telo deluje več istosučnih navorov, se ti med seboj seštevajo.

Težišča teles

Ko prenašamo naokrog lopato, hitro ugotovimo, kje jo moramo zagrabiti z eno samo roko, da se ne prevesi na nobeno stran in jo lahko kakorkoli obrnemo, pa tako tudi ostane. To oprijemno točko imenujemo *težišče*. Očitno je to tista točka, glede na katero so težni navori iz vseh delov lopate medsebojno izničeni. Vsako telo ima težišče, le da je ponavadi skrito znotraj telesa in nedostopno za prijem.

Kako za dano telo ugotovimo, kje ima težišče? Kadar je telo "pravilne" oblike – recimo krogla, kvader, valj – in je homogeno, ima težišče v svojem središču. Drugače pa obesimo telo za poljubno obesišče in pustimo, da obvisi. Težišče je tedaj nekje navpično pod obesiščem. To navpično črto, *težiščnico*, nekako označimo na telesu. Potem telo obesimo še za drugo obesišče; obe težiščnici se nekje sekata in tam je težišče.

Telo, postavljeno na ravno ploskev, stoji pokonci le, če težiščnica prebada podporno ploskev. Čim širša je ta ploskev, tem bolj je telo *stabilno*: majhni nagibi ga ne prekucnejo. Rokoborca, ki drug drugemu rušita ravnotežje, zato stojita razkoračeno.

9.8 Delo in težna energija

Sila in pot

Ko voz, ki je težek F_g, rinemo po klancu strmine φ navzgor, premagujemo klancu vzporedno komponento teže $F_{g\|}$ z nasprotno enako silo $F_\| = F_g \sin\varphi$. Ko pridemo na vrh klanca, smo se dvignili za višino h in prehodili pot $s = h/\sin\varphi$. Velja

$$F_\| s = F_g h\,, \tag{9.11}$$

in sicer za poljubno nagnjene, a enako visoke klance. Po bolj položnem klancu potiskamo pač z manjšo silo, a preko daljše poti. Očitno je produkt sile in poti, vzdolž katere sila deluje, tudi pomembna količina, in produkt teže ter višine telesa prav tako. Prvo količino poimenujemo *delo sile* in drugo *težno energijo* telesa:

$$\begin{aligned} A &= F_\| s \\ W &= F_g h\,. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Z vpeljanima definicijama zapišemo potem na kratko

$$A = \Delta W\,. \tag{9.13}$$

Delo in energija

Rečemo, da sila $F_\|$, ko dviguje telo, opravlja na njem delo. Za telo pa rečemo, da delo prejema. Rečemo tudi, da se prejeto delo naloži v telo in da se zaradi tega poveča njegova težna energija. Ta predstavlja nekakšno "zalogo" dela, ki ga dvignjeno telo ob ponovnem spustu oddaja v okolico: saj lahko preko vrvi dviga drugo telo. Težno energijo ima torej telo zaradi svoje dvignjene lege. Pravzaprav je bolj pravilno, če rečemo, da ima težno energijo sistem Zemlja-telo zaradi medsebojne povečane razdalje. Enota za delo je kpm – *kilopondmeter* – in za težno energijo prav tako.

Človek, ki rine voz po klancu navzgor, opravlja delo proti teži. Prav tako, ko iz vodnjaka z vrvjo dviguje vedro vode – z golimi rokami ali preko vretena z ročico, vitla. Čim daljša je ročica, s tem manjšo silo lahko vrti, a tem daljša pot vrtenja je potrebna. Tudi ko človek hodi po stopnicah navzgor, opravlja delo: sile mišic dvigujejo lastno telo. V vsakem primeru znamo povedati, koliko dela je bilo opravljenega na kakem telesu, in sicer kar na podlagi spremembe njegove težne energije. Pri tem pa je bistveno, da poteka gibanje počasi in enakomerno, ter da ni trenja. V nasprotnem primeru je opravljeno delo večje (saj je treba delati tudi proti sili trenja) kot sprememba težne energije.

Ohranitev energije

Rekli smo, da lahko dvignjeno telo spet spustimo po klancu nazaj, pri čemer nanj z vrvjo in preko vrtljivega kolesa, škripca, privežemo ustrezno težko drugo telo, da ga prvo telo dviguje navpično. Teža tega telesa mora znašati $F_g \sin\varphi$, da sta obe telesi uravnovešeni in je gibanje enakomerno. Padajoče telo izgublja težno energijo, dvigajoče se telo pa jo pridobiva. Kolikršna je izguba prvega, tolikšen je dobitek drugega. Rečemo, da se težna energija ohranja. To pa velja le takrat, kadar razen tež ni prisotnih nobenih drugih sil, zlasti ne trenja.

Moč

Človek lahko dvigne vedro vode iz vodnjaka v krajšem ali daljšem času. Obakrat opravi enako delo, vendar v različnem času. Delo na časovno enoto poimenujemo *moč*:

$$P = \frac{A}{t}\,. \tag{9.14}$$

Človek proizvaja moč 10 kpm/s preko nekaj ur in 100 kpm/s preko nekaj sekund. Konj dela več ur z močjo 75 kpm/s, ki jo zato tudi imenujemo *konjsko moč* (HP).

9.9 Dvigalni stroji

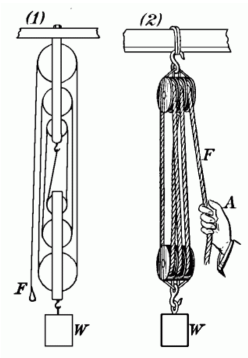
Potreba po dviganju težkih bremen je že stara in najstarejše priprave za dviganje so zato že dolgo znane. Pravzaprav so bile odkrite mnogo prej, preden smo sploh ugotovili, po kakšnih pravilih delujejo: to sta princip klanca (9.4) in vzvoda (9.8).

Vitel

Dviganju vode iz vodnjakov je namenjen že omenjeni *vitel*. To je vodoraven boben z ročico, na katerega se navija in odvija vrv z obešenim vedrom. Navor bremena glede na os bobna je enak navoru delovne sile preko ročice. Čim daljša je delovna ročica R in čim manjši je polmer bobna r, tem težja bremena lahko dvigamo: $F/F_g = r/R$.

Škripec

Gradbeniki dvigujejo bremena na stavbe z že omenjenimi škripci. *Škripec* je obešeno kolo, okrog katerega teče vrv. Na enem koncu pritrdimo breme in ga z vlečenjem drugega konca dvigujemo. Navor bremena in navor delovne sile glede na os škripca sta enaka. Delovna sila je enaka teži bremena in škripec služi le za spreminjanje njene smeri: $F = F_g$.



Slika 9.7 Škripčevje. Zgornji škripci so pritrjeni in spodnji so gibljivi. Kolikor je škripcev (šest), tolikokrat je dvižna sila manjša od teže bremena. (Millikan, 1906)

Domiselna povezava več škripcev, vpetih v pritrjeno in gibljivo ogrodje, tvori *škripčevje*. Čim več gibljivih škripcev n ima škripčevje, tem manjša sila je potrebna za dvig bremena: $F/F_g = 1/2n$.

Vijak in matica

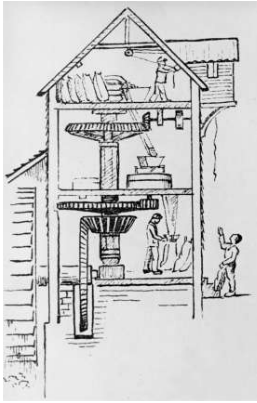
Dolg in ozek cilinder s spiralno zarezanimi grebeni in dolinami je *vijak*. Nanj lahko navijemo kratek in širok cilinder z luknjo, ki ima enake zareze kot vijak. To je *matica*. Vijak, ki se vrti znotraj matice, se pomika naprej ali nazaj. S takim vijakom lahko dvigamo bremena ali stiskamo sok iz grozdja in olje iz oliv, pri čemer vrtimo bodisi vijak bodisi matico z ustrezno ročico R, prav kakor pri vitlu. Vijak je pravzaprav klanec, zavit okrog cilindra. Pri enem zavoju se dvigne za h. Vrtenje matice po vijaku pa je dviganje bremena po klancu: $F/F_g = h/2\pi R$.

Slika 9.8 Vijačna stiskalnica za stiskanje oliv. V luknjo na vijaku vstavimo dolgo ročico. Pod vijakom namestimo posodo z olivami. (Anon)

Vsem naštetim pripravam, dvigalom, rečemo mehanski *delostroji*. Ti prejemajo in oddajajo delo. Če trenje ne moti preveč, sta prejeto in oddano delo enaka.

9.10 Vodno kolo

Opravljanje dela z mišicami je naporno, če nimamo človeških ali živalskih sužnjev. Pa saj lahko to dela reka! Vodni tok speljemo na vrh *vodnega kolesa* z lopaticami in teža dotekajoče vode ga obrača. Na os kolesa pritrdimo zobato kolo, ki obrača druga zobata kolesa. Nanje nato priključimo, na primer, mlinski kamen, da drobi pšenico v moko.



Slika 9.9 Vodno kolo. Obrača ga voda in vrtenje se preko zobatih koles prenaša na mlinske kamne, ki meljejo žito. (Norfolk Mills)

Uporaba koles

Izguba težne energije vode se pojavi kot delo sile, ki ga odvajajo kolesa. Kadar voda nima dovolj padca, moramo namesto nadlivnega kolesa uporabiti sredolivno ali podlivno kolo: potem voda ne obrača kolesa več toliko s svojo navpično težo, marveč s potisno silo, ki izhaja iz njenega vodoravnega gibanja. Krožno gibanje prenašamo naprej tudi z jermeni ali pa ga preko ekscentrično pritrjenega vzvoda spremenimo v premo nihanje; tako dobimo pogon za žago ali kovaški meh ali tkalske statve. Človek zagospodari nad naravo. □

10 Tekočine in težnost

Tlak teže – Tlak v tekočini – Tekočinski barometer – Vodna črpalka – Hidravlika – Zračna črpalka – Aneroidni barometer – Vzgon in plavanje

10.1 Tlak teže

Sila in ploskev

Ko hodimo po snegu, se vdiramo. Če pa pod noge pritrdimo smuči, je vdiranje dosti manjše. Obakrat pritiskamo na podlago z enako težo, vendar je ta vsakič porazdeljena na drugačno površino. To velja tudi za smuko po klancu, na katerega pritiskamo le s pravokotno komponento teže. Količnik med silo in ploskvijo, na katero ta sila deluje pravokotno, je očitno pomembna količina; rečemo ji *tlak*:

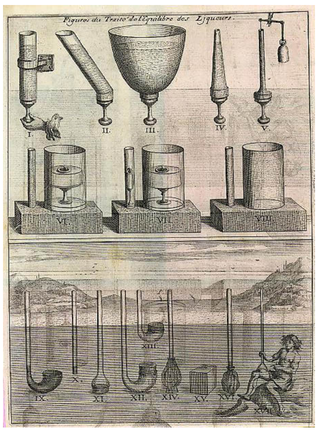
$$p = \frac{F_\perp}{S} \,. \tag{10.1}$$

Primerna enota za tlak je kp/cm^2. Ne samo teža, ampak tudi druge sile, recimo pritiskanje dlani na steno, izvajajo tlak. Kadar je ploščina, na katero deluje sila, zelo majhna, postane tlak zelo velik. Tlak pod konico ali rezilom noža je tako ogromen, da zlahka prebadamo in režemo razne snovi.

10.2 Tlak v tekočini

Tekočinski ocean

Ker živimo na dnu zračnega oceana, so tla pod tlakom zaradi njegove teže. Na morskem dnu se doda še tlak zaradi teže vode. Voda ali zrak v posodi pa ne pritiskata zgolj na dno, temveč tudi na stene, vanju potopljena telesa in sebe samo. Na poljubnem mestu v tekočini si zamislimo trikotno tekočinsko prizmo z vodoravno, navpično in poševno ploskvijo. Prizma miruje, zato morajo na njene ploskve delovati pravokotne sile, katerih vsota mora biti eneka nič. Iz tega sledi, da so tlaki na vsako ploskev enaki. To pomeni, da na vsakem mestu v tekočini deluje tlak v vse smeri enako, da je *izotropen* (PASCAL).



Slika 10.1 Tlak v tekočini. Prikazani so dejanski in zamišljeni poskusi: tlak pod stolpcem je neodvisen od oblike stolpca; v vezni posodi z debelim in tankim krakom sega voda do iste višine; na isti globini pod vodno gladino je tlak povsod enak in neodvisen od usmeritve ploskve. (Pascal, 1663)

Tlak in globina

Vodni ali zračni stolpec s specifično težo σ, presekom S in višino h je težek $F_g = \sigma S h$, zato povzroča pod seboj prirast tlaka F_g/S, torej

$$\Delta p = \sigma h\,. \tag{10.2}$$

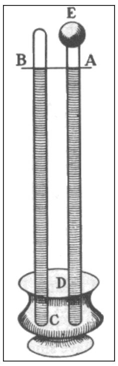
To je *hidrostatična enačba* (STEVIN). Enačba pove, da v morju naraste tlak vsakih 10 metrov globine za 1 kp/cm^2. V globini 5 km, kolikor so tipično globoki oceani, je tlak že strašen. Pravijo, da se kos lesa, z utežjo potopljen na dno in ponovno izvlečen, tako stisne, da v sodu vode potone kot opeka.

V ozračju, ki mu (zaenkrat) ne poznamo specifične teže, ne moremo reči, kako hitro pada tlak z višino. Ker je zrak, kot vemo, stisljiv, bi se morala njegova specifična teža z višino manjšati. Če bi zmogli izmeriti tlak zraka na različnih višinah, bi lahko specifično težo v vmesnem stolpcu izračunali.

10.3 Tekočinski barometer

Ravnovesje tlakov

Kako bi izmerili zračni tlak? Tako, da ga uravnovesimo s stolpcem kakšne primerne tekočine. Zaradi velike specifične teže je najboljše živo srebro. V stekleno cev dolžine 1 m, na enem koncu zaprto, nalijemo živo srebro do vrha, ga zapremo s palcem, obrnemo in vtaknemo v posodo z živim srebrom. Stolpec živega srebra v cevi se zniža in nad njim nastane prazen prostor. Tlaka zračnega in živosrebrnega stolpca sta izenačena. V krajih na morski gladini je stolpec povprečno visok 760 mm (TORRICELLI). To pomeni – ob specifični teži živega srebra 13,5 kp/dm^3 – tlak 1,03 kp/cm^2. Ta tlak bomo na kratko poimenovali 1 *atmosfera* (atm). Pri natančnosti na nekaj odstotkov velja 1 atm $\approx$ 1 kp/cm^2 in obe enoti obravnavamo kot sinonima. Priročna in nazorna enota za zračni tlak je tudi 1 mm Hg = 1/760 atm.



Slika 10.2 Merjenje zračnega tlaka. Težo zračnega stolpca nad gladino posode uravnoveša teža živosrebrnega stolpca v zaprtem kraku. Prikazana sta dva kraka različne oblike. V obeh sega živo srebro do iste višine. (Torricelli, 1644)

Višina ozračja

Zračni tlak na morski gladini ni povsod in vedno enak, ampak niha do največ ± 5 %. Z višino pada. V prvih sto metrih pade živosrebrni stolpec za okrog 9 mm, potem pa čedalje manj. To torej pomeni, da znaša po hidrostatični enačbi (10.2) specifična teža zraka v prizemni plasti okrog 1,2 kp/m^3, tisočkrat manj od vode. Če se specifična teža zraka z višino ne bi spreminjala in bi bila enaka tisti na morski gladini, potem bi bilo ozračja konec pri

8 km. Dejansko pa na vrhovih najvišjih gora, na višini 8 km, izmerimo tlak okrog $1/3 \cdot \text{kp/cm}^2$.

Merjenje tlaka je bolj priročno, če posodo in cev združimo v enotno cev z obliko črke J, pri kateri je dolgi krak zaprt in kratki odprt. To je *barometer*.

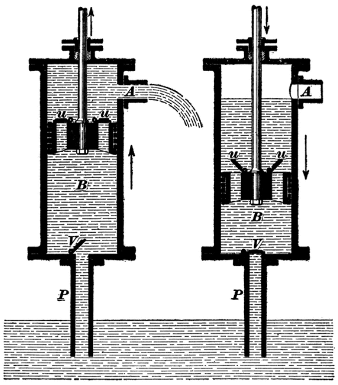
Slika 10.3 Stenski barometer – merilnik za zračni tlak. Težo zračnega stolpca nad odprtim kratkim krakom uravnoveša teža živosrebrnega stolpca v dolgem zaprtem kraku. (Anon)

10.4 Vodna črpalka

V cevi, navpično vtaknjeni v vodo, stoji gladina enako visoko kot zunaj. Če bi se pa iz kakršnegakoli razloga zmanjšal tlak zraka nad gladino v cevi, ne pa tudi zunaj, bi zunanji presežni tlak rinil vodo v cev tako visoko, dokler ga ne bi uravnovesil težni tlak dvigajočega se stolpca.

Sesalni bat

Kako naj zmanjšamo tlak zraka v cevi? Tako, kot pijemo vodo po slamici: pokrijemo jo z jezikom in ga povlečemo nazaj; zrak iz slamice zavzame novo ustvarjeni prostor, se zredči, tlak se mu zmanjša in voda v slamici se dvigne. Po tem zgledu zgradimo *batno črpalko*, v kateri igra vlogo ust in jezika cilinder s premičnim batom. Za to, da črpana voda in zrak ne odtekata nazaj, skrbita dve premični zaklopki. Takšna črpalka lahko sesa vodo največ iz globine 10 m in jo nadalje, po potrebi, še potiska do poljubne višine.



Slika 10.4 Sesalno-dvižna črpalka. Ko se bat dviga, sesa vodo po cevi P (pravzaprav to vodo potiska zunanji zračni tlak) in hkrati dviguje vodo do cevi A. Ko se spušča, pa si na rame naloži novo vodno breme iz B. Če uporabimo bat brez zaklopke in premestimo izhodno cev podenj ter jo opremimo z zaklopko, dobimo sesalno-potisno črpalko. (Hallock, 1905)

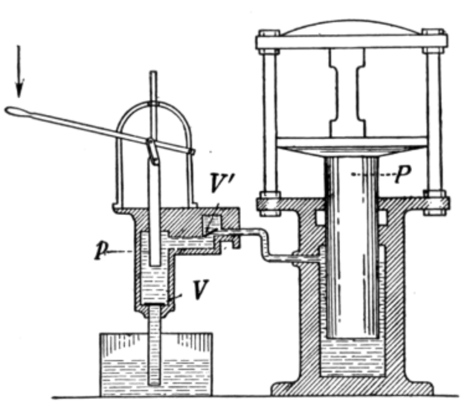
10.5 Hidravlika

Tekočinski vzvod

V vezni posodi z ozkim in širokim krakom stoji voda v obeh enako visoko. Če v vsak krak nalijemo dodatno, enako debelo plast vode (obarvajmo jo rdeče), bo ta spet stala povsod enako visoko. Prostornina dolite vode in s tem njena teža je v širokem kraku večja kot v ozkem. Namesto dolivanja vode lahko vsak krak zapremo z batom in nanj položimo ustrezno utež. Manjša utež v ožjem kraku drži ravnovesje veliki uteži v širokem kraku. Očitno velja $F_1/S_1 = F_2/S_2$. Nobene omejitve ni glede velikosti obeh tež, le njuno razmerje mora biti ustrezno. To je "tekočinski vzvod".

Ogromne sile

Če v uravnovešenem tekočinskem vzvodu obremenimo ozki bat s silo F_1, bo široki bat potisnil navzgor z veliko silo $F_2 = F_1(S_2/S_1)$. To silo lahko izkoristimo za več namenov – dvignemo breme, zvijamo in luknjamo železno pločevino in podobno. Sile, ki jih tako ustvarimo, so lahko ogromne. Seveda pa so njihovi premiki ustrezno krajši, saj izhodno delo ne more biti večje od vhodnega. V takšnih *hidravlikah* uporabljamo olje namesto vode, da se izognemo rjavenju.



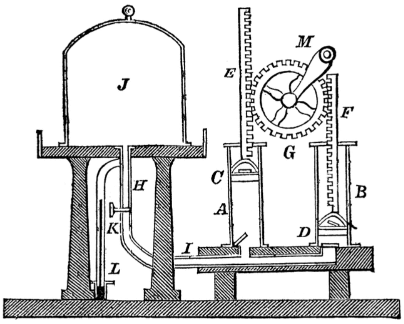
Slika 10.5 Hidravlično dvigalo oziroma stiskalnica. Iz ozkega cilindra potiskamo olje v široki cilinder s sesalno-potisno črpalko. Vmesna zaklopka preprečuje njegovo vračanje. Potrebno olje se sproti črpa iz rezervoarja. (Tower, 1920)

Če široki bat blokiramo, da se ne more premikati, ustvarimo v tekočini pod njim velik tlak. Seveda morajo biti stene dovolj močne, da zdržijo.

10.6 Zračna črpalka

Redčenje zraka

Batna črpalka "sesa" vodo, ki jo vanjo potiska zunanji zračni tlak. Če črpalko priključimo preko dobrega ventila na zaprto, togo posodo z zrakom, pa "sesa" zrak, ki ga vanjo potiska kar tlak v posodi. Čim manj zraka ostane v posodi, tem manjši tlak pokaže priključeni barometer. Dobre batne črpalke znižajo tlak do $1/10^3 \cdot \mathrm{kp/cm^2}$. Ako posoda ni zares trdna, jo – ko je dovolj izčrpana – zunanji zračni tlak stisne v kepo. Sile, ki delujejo na prazno posodo, so presenetljivo velike: na pokrov kozarca za marmelado, ki ima presek $1\,\mathrm{dm^2}$, pritiska zunanji zrak s silo $100\,\mathrm{kp}$!



Slika 10.6 Zračna črpalka. Zobato kolo izmenično premika dva bata. Levi bat, ki se dviguje, sesa zrak iz posode J. Desni, ki se spušča, pa posesani zrak odstranjuje. (Quackenbos, 1859)

Zgoščanje zraka

Črpalka z obrnjenimi ventili postane tlačilka: v posodo lahko tlačimo zrak. Pri tem se posoda in tlačilka močno segrevata. Očitno se zrak pri stiskanju segreva in od njega se segreva tudi okolica.

Tehtanje zraka

Tlačenje zraka v posodo nam da zamisel, kako izmeriti njegovo specifično težo na preprost način. Stehtamo odprto stekleno bučo, opremljeno s pipico. Vanjo s tlačilko natlačimo dodaten zrak, pipico zapremo in bučo spet stehtamo. Nato po stekleni cevki počasi spustimo ujeti zrak v obrnjen cilinder, napolnjen z vodo in potopljen v posodo z vodo; to je plinska kad. Na cilindru označimo prostornino doteklega zraka, tipično kakšen liter. Z razliko obeh tež in s prostornino je specifična teža zraka enolično določena: 1 liter tehta 1,2 ponda, kakor že vemo [10.3]. Namesto da tlačimo zrak v posodo, ga lahko iz nje izčrpamo. Če stehtamo polno in prazno posodo, spet dobimo težo zraka. Paziti moramo le na to, da izčrpamo čim več zraka.

10.7 Aneroidni barometer

Elastični meh

Živosrebrni barometer je neroden za prenašanje in uporabo. Kakšen bi bil boljši merilnik? Namesto s težo tekočinskega stolpca lahko tlak uravnovesimo z elastičnim mehom v obliki harmonike. Pločevinast meh, iz katerega izčrpamo del zraka in ga nato neprodušno zapremo, se stiska pod večjim zunanjim tlakom in se razteza pod manjšim tlakom. Kazalec, pritrjen na steno meha, vse to pokaže. Napravo umerimo z živosrebrnim barometrom ali z batnim cilindrom pod utežmi in dobimo vzmetni barometer ali *aneroid*.

Slika 10.7 Aneroidni barograf. Izsesani kovinski meh se širi in krči pod vplivom zunanjega zračnega tlaka. Te spremembe se prenašajo na vzvod, ki piše po vrtečem se valju. (Anon)

Višinomer in globinomer

Z aneroidom udobno merimo zračni tlak po Zemlji. Če predhodno izmerimo odvisnost zračnega tlaka od višine, pa je uporaben celo kot merilec nadmorske višine. V predelani obliki je primeren tudi za merjenje tlaka – in s tem globine – pod morjem. Razne oblike aneroidnih tlakomerov (manometrov) pokrivajo merilno območje med $1/10^3$ in $10^3\,\mathrm{kp/cm^2}$.

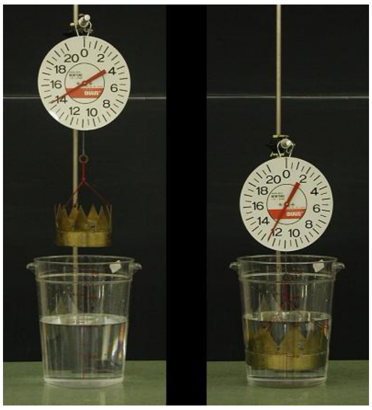
10.8 Vzgon in plavanje

Telo v tekočini

Ker tlak v morju narašča z globino, čuti potopljeno telo *vzgon*, ki nasprotuje njegovi teži. Tlak navzgor na spodnjo ploskev telesa je namreč večji kot tlak navzdol na zgornjo ploskev. Zamislimo si poljubno oblikovano telo, sestavljeno kar iz vode same, recimo navpični cilinder. To vodno telo miruje, zato je očitno vzgon enak njegovi teži. Če nadomestimo vodno telo s "pravim" telesom, ostane vzgon okolišnje vode nanj prav tak, kot prej. Vzgon na potopljeno telo kakršnekoli oblike je torej enak teži izpodrinjene tekočine:

$$F = \sigma V. \qquad (10.3)$$

To je *vzgonski zakon* (ARHIMED). Če je vzgon manjši od teže telesa, to potone, sicer se pa dvigne na površje in plava. Pod gladino ga ostane toliko, da je teža izpodrinjene vode enaka njegovi teži. Od vode gostejši kosi snovi torej potonejo, redkejši plavajo. Led plava, torej je redkejši od vode. Ledene gore skrivajo 9/10 svoje prostornine pod gladino. Kakor kaže, je voda tudi edina snov, ki se ji pri zmrzovanju poveča prostornina. Zaradi vzgona se nam zdijo kamni v vodi lažji kot na kopnem. Isto velja za telesa v zraku: pri natančnem tehtanju je treba upoštevati tudi vzgon merjenca in uteži.



Slika 10.8 Vzgon telesa (v obliki krone) v tekočini. Na potopljeno telo deluje navpično navzgor sila, ki je enaka teži izpodrinjene tekočine. (University of Colorado)

Plavanje ladij

Čolni in ladje plavajo, tudi če so narejeni iz železa. Oblikovani so pač tako, da teža izpodrinjene vode postane enaka teži ladje že pri plitvem ugrezu. Plavanje traja, dokler v ladjo ne vdere voda, s čimer se ji teža toliko poveča (mislimo si, da smo jo namesto z vodo obremenili s kamenjem), da premaga vzgon.

Kot vsako telo ima tudi ladja svoje težišče. Prav tako ima svoje težišče izpodrinjena voda (predstavljati si jo moramo v luknji, ki jo ladja dela pod gladino); temu težišču rečemo *metacenter*. Teža ladje prijemlje v težišču in vzgon v metacentru. Da bo ladja stabilna, mora biti njeno težišče pod metacentrom, in to pri pokončni legi ladje ter še pri čim večjem nagibu. Le v tem primeru se nagnjena ladja sama vzravna. Zato imajo ladje, zlasti visoke jadrnice, močno obtežene kobilice.

Plavač

Vzgon istega telesa v sladki in slani vodi je različen, kar lepo vidimo, ko plavamo. Slana voda ima namreč večjo specifično težo in v njej se manj potopimo. Če stehtamo kovinsko kroglico najprej na zraku in nato – obešeno na tanki nitki – še potopljeno v eno in drugo tekočino, je razmerje obeh težnih sprememb enako razmerju specifičnih tež obeh tekočin. Tako merimo relativne specifične teže tekočin. Zaradi udobnosti izdelamo še plavač – zaprto stekleno cevko, ki je spodaj obtežena, da plava pokonci. V redkejših tekočinah se potopi bolj in v gostejših manj. Plavač umerimo v različnih tekočinah in nanj narišemo skalo. Z njim merimo, recimo, delež raztopljene soli v vodi ali delež alkohola v žganju. □

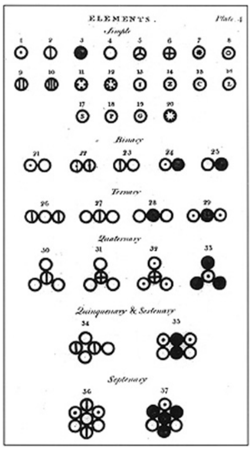
11 Snovne reakcije

Atomi in molekule – Gorenje in kisik – Plini pri gorenju – Plini pri žarjenju – Kisline, lugi in soli – Destilacija raztopin – Eksplozivne zmesi – Analiza snovi

11.1 Atomi in molekule

Delci snovi

Raznolikost snovi je brezmejna in njihove spremembe, na primer pri raztapljanju, taljenju in gorenju, so osupljive. Kako vse to pojasniti? Ponuja se naslednja domneva. Snovi so sestavljene iz zelo drobnih, nedeljivih in neuničljivih delcev, *atomov*. Ti se pri kratkih razdaljah medsebojno privlačijo. Atomov je več vrst; koliko, je zaenkrat preuranjeno domnevati. Istovrstni atomi so med seboj popolnoma enaki. Atomi se združujejo v gruče, *molekule*. Različne snovi so sestavljene iz različnih molekul. Čiste snovi vsebujejo le molekule ene vrste, zmesi pa molekule več vrst. Posebej odlikovane so tiste čiste snovi, katerih molekule so sestavljene le iz ene vrste atomov; to so *prvine* ali *snovni elementi*. Marsikatero vrsto molekul okusimo z jezikom ali zavohamo z nosom.



Slika 11.1 Atomarna slika snovi. Snov je sestavljena iz nedeljivih in neuničljivih delcev, atomov. Atomov je več vrst. Istovrstni atomi so med seboj popolnoma enaki. Enaki ali različni atomi se združujejo v gruče, molekule. Različne snovi so sestavljene iz različnih molekul. (Dalton, 1808)

Gibanje delcev

Molekule se neprestano gibljejo. To gibanje občutimo s kožo kot temperaturo. Pri počasnem gibanju molekule ne spreminjajo medsebojne lege, nihajo le njihovi atomi okrog ravnovesnih leg: snov je trdna. Pri močnejšem gibanju molekule spreminjajo medsebojno lego, vendar se držijo druga druge: snov je tekoča. Pri še močnejšem gibanju se molekule medsebojno ločijo in razpršijo: snov je plinasta. Gibanje molekul – v trdnini, tekočini ali plinu – se s trki prenaša iz bolj živahnih območij v manj živahna: toplota se širi in temperature se izenačujejo.

Stabilnost vezi

V razmerah, kakršne vladajo na zemeljski površini, so nekatere snovi plinaste, druge tekoče in tretje trdne. Raznovrstni atomi so že zadovoljno združeni s svojimi partnerji v razne *spojine* in vlada splošni mir. Vse, kar je lahko spojeno, je spojeno. Če se pa kje iz kakršnegakoli razloga poviša temperatura, se vezi med partnerji zrahljajo in morda celo prerazporedijo. Močnejši atomi zmagujejo. Molekule, in z njimi snovi, se spreminjajo.

Trki in sevanje

Trkanje in spajanje dovolj "vročih" atomov je tako silovito, da pri tem nastajajo delci svetlobe, *fotoni*, in odletavajo na vse strani. Ko pridejo v oči, jih vidimo. Različne fotone vidimo kot različne barve. Na svoji poti zadevajo ob snovne delce, se od njih odbijajo ali v njih izginjajo. Pri tem povečajo živahnost snovnega gibanja. Medtem ko so atomi obstojni, se fotoni rojevajo, živijo in umirajo.

Naša domneva o atomih in fotonih je seveda zaenkrat zgolj to – domneva. Ima pa tako veliko razlagalno in napovedovalno moč, da jo hočemo ohraniti vse dotlej, dokler bo le šlo, morda z nekaterimi spremembami ali dopolnitvami. Pričakujemo tudi, da bo naše nadaljnje raziskovanje domnevo podkrepilo do te mere, da jo bomo proglasili za resnico.

11.2 Gorenje in kisik

Kisik v zraku

Les, oglje, žveplo in druge snovi gorijo. Tudi voščena sveča gori; pri tem se krajša, dokler povsem ne izgine. Če pa jo pokrijemo s steklenim zvonom, gori samo malo časa in potem ugasne. Večji kot je zvon, dalj časa gori. Zdi se, kot da se pri gorenju poleg voska porablja nek sestavni plinasti del zraka in ko ga zmanjka, sveča ne more več goreti. Ta domnevni plin poimenujemo *kisik*.

Slika 11.2 Gorenje sveče pod steklenim zvonom. Ta je postavljen v mlako vode, da je bolje zatesnjen. Sveča ne gori do konca, marveč predčasno ugasne. Pri gorenju se spreminja sestava zraka. Skupna teža vseh snovi v zvonu se pri tem ne spremeni. (Anon)

Predstavljamo si torej, da je prvotni zrak zmes molekul "gorljivega" kisika in "negorljivega" *dušika*. Do nadaljnjega privzamemo, da sta oba plina elementa. Zrak, ki po gorenju preostane v zvonu, pa ni več prvotni zrak: v njem je le malo ali nič kisika, ampak le dušik, in primešali so se mu novonastali plini, eden ali več, katerih molekule so se zgradile iz "porabljenih" molekul kisika in voska.

Oksidacija in ohranitev teže

Če domneva o neuničljivosti atomov drži, bi morala teža snovi pod zvonom ostati nespremenjena. Tehtanje zvona je zaradi slabega tesnenja vprašljivo. Zato iščemo naprej in najdemo naslednjo izboljšavo. V stekleno epruveto nasujemo koščke kositra in odprtino neprodušno zatalimo. Potem epruveto segrevamo nad žarečim ogljem. Kositer se stali in pod njim nastaja črn prah. Po kaki uri se tvorjenje prahu ustavi, čeprav nekaj kositra še ostane. Epruveto odstranimo in ohladimo. Občutljiva tehtnica pokaže, da se teža zaprte epruvete z vsebino vred – tipično 20 pondov, od tega okrog 10 pondov kositra – nič ne spremeni, in sicer z natančnostjo ± 1 miliponda. Skupna teža se pri spremembi snovi torej res ohranja. To je *zakon o ohranitvi teže* (LAVOISIER). Potem epruveto razbijemo in stehtamo novonastalo snov skupaj s preostalim kositrom. Ugotovimo, da je težja kot kositer na začetku. Dodatno težo pripišemo kisiku, ki se je povezal s kositrom. Rečemo, da je kositer oksidiral in da je iz njega nastal kositrov oksid. (To je prav tista ruda, iz katere kositer pridobivamo.) Pri tem se teža poveča za okrog 10 milipondov. V oksidaciji pa prepoznamo počasno gorenje.

11.3 Plini pri gorenju

Plinski gorilnik

Raziščimo zdaj pline, ki nastajajo pri segrevanju raznih snovi! Za to najprej potrebujemo primeren gorilnik. Zelo dobro se obnese gorilnik na svetilni plin. Ta plin nastaja kot stranski produkt pri pridelavi koksa iz premoga in ga lahko ujamemo ter s črpalko natlačimo v zbiralne posode.

Slika 11.3 Plinski gorilnik. Na kovinski priključek nataknemo gumijasto cev, po kateri doteka svetilni plin. Z obračanjem kovinskega obroča uravnavamo velikost lukenj za dotok zraka in s tem jakost plamena. (Anon)

Plinski zbiralniki

V vodoravno stekleno cev damo preučevano snov in jo od spodaj segrevamo. Ena stran cevi je odprta za dotok zraka, druga pa je zaprta z zamaškom, skozi katerega vodi tanka steklena cev. Iz nje izhaja mešanica plinskih produktov. Mešanico najbolj učinkovito ujamemo v obrnjeno posodo, potopljeno v vodi ali živem srebru. Vzgon jih namreč potiska navzgor. To je plinska kad. Pline, ki so lažji od zraka, ujamemo kar pod obrnjeno posodo (ki je seveda potopljena v zraku). In tiste, ki so težji, preprosto nalijemo, kot nevidno vodo, v pokončno posodo.

Ogljikov oksid iz ogljika

Ko segrevamo oglje in vtaknemo izhodno cevko v posodo z apneno vodo (raztopino apna), postane ta motna: iz nje se izloča droben bel prah in počasi pada na dno. (Kaže, da je to apnenec, iz katerega pridobivamo apno.) Voda je torej nekaj odkrila; rečemo, da je reagirala oziroma da je reagent. Domnevamo, da se pri gorenju oglja tvori nek plin, spojen iz atomov oglja (oziroma ogljika) in kisika; poimenujemo ga *ogljikov oksid*. Njegovo prisotnost izdaja apnena voda. Mešanico plinov iz izhodne cevke nato natočimo, kot nevidno vodo, v stekleno posodo. Ogljikov oksid se izkaže za težjega od zraka in posodo napolni do roba. To vidimo po tem, da sveča v njej ugasne in miš se zaduši.

Ogljikov sub-oksid

Ali lahko pridobljeni ogljikov oksid kaj spremenimo? Speljimo ga skozi cev z razžarjenim ogljem in plin, ki izhaja, spet preskusimo z apneno vodo! Ta ne pobeli več: plin je postal drug. Domnevamo, da je ogljik v cevi odtegnil ogljiku v ogljikovem oksidu del kisika; oba ogljika sta si takorekoč razdelila razpoložljivi kisik in nastal je "osiromašeni" *ogljikov sub-oksid*. Plin je približno tako težek kot zrak. V njem se sveča in miš prav tako zadušita.

Žveplov oksid iz žvepla

Tudi segrevanje žvepla daje plin; zaznamo ga že po vonju. Domnevamo, da je plin spojina iz atomov žvepla in kisika ter ga poimenujemo *žveplov oksid*. Če ga vodimo v posodo z vodo, se v njej raztaplja in jo dela kislo. Rečemo, da je nastala *žveplova kislina*. Vdihavanje plina ali pitje njegove vodne raztopine je navarno, ker razjedata sluznico.

Žveplov super-oksid

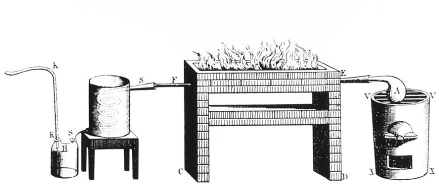
Morda lahko tudi žveplov oksid še kaj spremenimo? V močno greto cev uvajamo vzporedna curka žveplovega oksida in zraka; preveriti hočemo, ali si morda žveplo ne bo pripojilo kaj dodatnega kisika. To se ne zgodi: izhajajoči plin je nespremenjen. Če pa v cev natlačimo razrahljan klobčič iz platinaste žice, upajoč na njegovo "posredništvo", se na izhodu res pojavi nov plin, ki se ohladi in kondenzira v tekočino. Platina se pri tem nič ne spreminja, ampak očitno služi le kot delovna površina, na kateri si žveplo v oksidu prisvaja dodaten kisik in postane *žveplov super-oksid*. Njegova raztopina v vodi je kisla. Rečemo ji *žveplena kislina*. Že v majhni koncentraciji je strašno nevarna: razžira in poogleni kožo in druge organske snovi.

Vodikov oksid iz voska

Pri segrevanju voska prav tako izhaja plin, ki pobeli apneno vodo, hkrati se pa na stenah cevke nabirajo še vodne kapljice. Tvorita se torej dva produkta: ogljikov oksid in vodna para. Kot se je kisik iz zraka spojil z ogljikom iz voska v ogljikov oksid, tako sklepamo, da se je kisik iz zraka spojil z neko drugo snovjo v vosku, recimo ji *vodik*, v *vodikov oksid*, po domače vodo. Ker vosek popolnoma zgori, sklepamo, da sta v njem zgolj vodik in ogljik (in morda še kisik). Enake plinske produkte kot vosek da tudi les, le da za njim ostane še majhen ostanek, negorljiv pepel.

Vodik iz vode

Morda lahko dobimo vodik nazaj iz vode? V stekleni posodi vremo vodo in paro uvajamo v vodoravno železno cev, v kateri so natroseni železovi opilki. To cev od spodaj močno segrevamo. Vodna para se na vročini razkroji v kisik in vodik, kisik se veže z železom v *železov oksid* (rjo), preostali vodik, pomešan z nerazkrojeno vodno paro, pa uhaja iz cevi. Mešanico vodimo skozi spiralno bakreno cev, da se para ohladi in kondenzira, prepuščeni vodik pa ujamemo v plinsko kad, kjer ostane plin. Spoznamo ga po tem, da zgori, če ga prižgemo z gorečo trsko. Pri gorenju se stene orosijo z vodnimi kapljicami in tako potrdijo sestavo vode.



Slika 11.4 Razcep vode v kisik in vodik. Vročina razbije vodne molekule. Kisik se veže na železo, ki rjavi, prepuščeni vodik pa napreduje v plinsko kad. (Lavoisier, 1862)

11.4 Plini pri žarjenju

Doslej smo segrevali snovi ob prisotnosti kisika. Poskusimo sedaj brez njega! Postopamo prav tako kot doslej, le steklena posoda, v kateri imamo vzorec snovi, naj bo na vhodu zaprta.

Metan iz lesa

Pri žarjenju suhe žagovine (zdrobljenega lesa) se ta spreminja v oglje, izhaja pa plin, ki ga ujamemo v plinski kadi. Poskus je podoben kuhanju oglja iz lesa v kopah in kuhanju koksa iz premoga v železarnah, le da se tam ne menimo za uhajajoče "svetilne" pline. Ujetnik v kadi je torej tudi neke vrste svetilni plin in je verjetno mešanica različnih plinov. Domnevamo, da prevladuje plin, ki je spojen iz ogljika in vodika (saj smo dotok kisika preprečili), ter ga poimenujemo *metan*. Domnevo potrdimo s sežiganjem ujetega plina v zraku, pri čemer nastajata ogljikov oksid in vodna para. Metan se dostikrat dviga iz močvirij, kjer na dnu razpadajo rastline brez prisotnosti kisika.

Kisik iz oksidne rude

Ko žarimo živosrebrni oksid (rdečo rudo, ki nastane po začetnem sežiganju živosrebrnega sulfida pri pridobivanju živega srebra), se zgornji del posode posrebri, skozi cevko pa izhaja plin, ki ga ujamemo v plinski kadi. Poskus je prav tak kot pri pridobivanju živega srebra, le da sedaj lovimo nastale pline. Ko v ujetnika potisnemo tlečo trsko, ta živo zagori. Plin torej pospešuje gorenje. Sklepamo, da je to kisik, prav takšen, kot je pomešan v zraku. Pri pridobivanju živega srebra se je sproščeni kisik vezal z ogljem v ogljikov oksid.

11.5 Kisline, lugi in soli

Žveplena kislina

Že spoznana žveplena kislina, ki zlahka razžira druge snovi, se ponuja kot učinkovito orodje za raziskave. Kakor s kladivom razbijamo kamne, tako upamo z žvepleno kislino razstavljati snovi.

Solna kislina

Ko morsko sol polijemo z žvepleno kislino, nastaneta dve novi snovi: nekakšna trdna usedlina in kisla tekočina; slednjo poimenujemo *solna kislina*. Tudi ona razžira snovi in je zato uporabna kot reagent.

Ogljikov oksid iz kisline in apnenca

Apnenec, ki ga polijemo s solno kislino, se razkraja in izločajo se mehurčki plina, ki jih identificiramo kot ogljikov oksid. Tako ga lahko udobno tvorimo v delavnici. Isto se zgodi z uporabo žveplene kisline.

Vodik iz kisline in kovine

Cink, polit s solno kislino, se razkroji, pri čemer se izločajo mehurčki plina, ki ga identificiramo kot vodik. To je udoben način za njegovo proizvodnjo v delavnici. Polivati moramo po kapljicah. Če cink kar vržemo v kislino, se hipoma sprosti veliko vodika in toplote, vodik se vname in eksplodira. Vodik mora priti iz kisline, saj ga iz cinka na druge načine ne uspemo pridobiti. Isto se zgodi, ko uporabimo žvepleno kislino. Tudi ta mora vsebovati vodik.

Klor iz kisline in kovinskega oksida

Kot vestni raziskovalci nato s solno kislino polivamo še vse mogoče snovi in gledamo, kaj se zgodi. Ko obdelujemo posebno rudo manganov oksid (iz nje z ogljem pridobivamo kovino mangan), se začno izločati mehurčki doslej neznanega plina. Je zelenorumen in ostrega vonja. Poimenujemo ga klor. Priti mora iz solne kisline, prav kakor je prej iz nje prišel tudi vodik.

Nevtralizacija

Žveplena in solna kislina sta kisli, raztopini sode v vodi in pepelike v vodi pa sta lužnati. Kaj če zmešamo kislino in lug? Ravno pravšnja količina solne kisline, vlite v raztopino sodinega luga, naredi tole: začetni snovi se povsem spremenita v vodo in (raztopljeno) morsko sol. Rečemo, da sta kislina in lug *nevtralizirala* eden drugega. Če je kisline preveč ali premalo, je nevtralizacija le delna. Podobno velja za solno kislino in pepelikin lug, ko tudi nastane neka sol, ki je zelo podobna morski.

11.6 Destilacija raztopin

Podobno kot žarimo trdne snovi, lahko segrevamo tudi razne raztopine, da začno močno izhlapevati, nakar hlape ujamemo, ohladimo in pogledamo, kaj smo dobili.

Čista voda

Segrevanje morske vode da paro, ki se kondenzira v izpušni cevki in kaplja ven. To je *destilirana voda*. Nič več ni slana. Vse snovi, ki so bile v njej raztopljene, je pustila za sabo. Čez čas se pokažejo v izparilni posodi kot trdne usedline. Poskus je natančen posnetek tistega, kar se nenehno dogaja v naravi ob izhlapevanju morske vode.

Slika 11.5 Pribor za destilacijo. Hlajenje vročih plinov v izhodni cevi poteka z vodnim protitokom od spodaj navzgor. (Anon)

Alkohol

Vse kmetijske družbe prej ali slej odkrijejo, kako iz žita izdelovati pivo ali iz grozdja vino. Pivo in vino sta pijači, ki omamljata, in ni čudno, da ju ljudje radi uživamo. Predvidevamo, da pijači v sebi skrivata posebno snov, ki povzroča omamo. Ta snov – recimo ji alkohol – je zmešana v vodi. Očitno je je v vinu več kot v pivu. Kako bi jo izvlekli? Ponuja se destilacija. Z njo ugotovimo, da je v kondenziranih hlapih več alkohola kot v izvorni pijači. Alkohol torej izpareva močneje kot voda. Če postopek nekajkrat ponovimo, dobimo dokaj čist alkohol. Je lažji od vode in dobro gori. Pri tem nastajata vodna para in ogljikov oksid, prav kakor pri vosku. To pomeni, da je tudi alkohol sestavljen iz ogljikovih, vodikovih in (morda) kisikovih atomov.

Naftna goriva

Ko ljudje iščejo in kopljejo premog, ponekod naletijo na izvire goste, temne, oljnate tekočine – nafte. Dostikrat jo najdejo skupaj s premogom. To napeljuje na misel, da imata obe snovi isti izvor, namreč starodavne, zalite, pokopane in stisnjene rastline. Kakšne sestavine se morda skrivajo v nafti? V destilirni napravi podaljšamo navpično cev in na različnih višinah naredimo več izhodov. Temperatura v cevi pojema z višino. Različne sestavine v izhlapeli nafti se morajo kondenzirati na različnih višinah ter izstopati skozi različne izhode. To je frakcionalna destilacija. Res z njo uspemo iz nafte izločiti več tekočih sestavin, ki vse dobro gorijo: bencin, svetilni petrolej, plinsko olje in druge. Kaže, da so sestavljeni iz istih atomov kot alkohol.

11.7 Eksplozivne zmesi

Smodniška zmes

Mešanje različnih snovi lahko prinese tudi nevarna presenečenja. Zgodba pravi, da je pri drobljenju oglja, žvepla in *solitra* – belih kristalčkov, ki jih kot skorjo najdemo na tleh in stenah podzemnih votlin, kjer prebivajo jate netopirjev – v železni tarilni posodi prišlo do eksplozije. Očitno je takšna mešanica – *smodnik* – hitro vnetljiva in hudo gorljiva. Človek ne bi bil človek, če ne bi takoj pomislil, kako bo novo odkritje uporabil za vojno: smodnik je treba le nasuti v železno cev, zaprto na eni strani, nanj s palico poriniti svinčeno kroglo in ga prižgati skozi drobno luknjico. Smodnik eksplodira, nastali plini potisnejo kroglo iz cevi z veliko hitrostjo in *top*, *puška* ali *pištola* so rojeni.

Slika 11.6 Pištola na smodnik s kresilnim vžigom. Replika orožja iz "gusarskih" časov. (National Rifle Association)

Soliter kot oksidant

Vojni obeti vzpodbujajo nadaljnje raziskave. Kot vojaški raziskovalci taremo vsako snov zase in v keramičnih posodah, nato jih mešamo v malih količinah in v različnih razmerjih ter prižigamo. Najmočnejše eksplozije in najmanj preostankov dobimo pri utežnem razmerju 6 (soliter) : 1 : 1. Če solitra ni, sploh ne nastane eksplozija, temveč le navadno, počasno gorenje. To nas navede na misel, da je v solitru vezan kisik, ki omogoča hitro in močno gorenje. Rečemo, da je soliter *oksidant*.

Pridobivanje solitra

Prostega solitra v naravi je malo: "raste" iz posušenih in zbitih netopirjevih odpadkov. Morda ga je pa še kaj skritega v odpadkih samih? Vržemo jih v vrelo vodo, nastalo raztopino odcedimo skozi plast pepela in nato pustimo, da na soncu izhlapi: res preostanejo beli kristalčki solitra. Namesto netopirjevih odpadkov lahko uporabimo hlevski urin, ki se steka v peščeno jamo; po letu dni izkopljemo prepojeni pesek in ga obdelamo. Namesto jame s peskom je dobra tudi posoda s slamo. In seveda – primeren je tudi človeški urin. Svoj čas je imela vsaka vojašnica ustrezne zbiralne posode.

Zrnati smodnik

Pri prenašanju smodnika – v sodčkih in rogovih – se prašne sestavine zaradi tresenja med seboj hitro ločijo; ene se usedejo na dno, druge ostanejo na vrhu. Takšen smodnik ne eksplodira dobro. Pred uporabo ga je potrebno premešati, kar pa je nevarno. Zato pri izdelavi smodniški prah navlažimo z vodo in ga stisnemo skozi gosto rešeto v zrna, ki jih nato posušimo. Dobimo zrnat smodnik in v vsakem zrnu je razmerje med sestavinami pravilno. Čim bolj drobna so zrna, tem hitreje in močneje izgorevajo. Edina težava, ki še preostane, za vojsko, je obilica belega dima. Morda pa to niti ni tako slabo: manj kot se vojaki vidijo preko puškinih cevi, manj je mrtvih.

11.8 Analiza snovi

Na podlagi prikazanih poskusov (in še mnogih drugih) se že kaže, iz katerih atomov utegnejo biti sestavljene molekule raznih snovi. Posebej pomembno je, katere med njimi so prvine.

Tehtanje snovi

Kako ugotovljamo, ali je kakšna snov prvina ali spojina? Edini način je, da jo poskušamo razcepiti na vse možne načine. Pri tem se teža ohranja. Če torej produkti vedno tehtajo več kot preiskovana snov, in nikoli manj, potem je snov prvina. Previdno lahko rečemo, da je prvina še nerazcepljena, ne pa tudi nerazcepljiva snov.

Seznam prvin

Tako kaže, da je vodik prvina, to je, da so njegove molekule sestavljene le iz atomov ene vrste, namreč vodikovih. Koliko je atomov vodika v molekuli vodika – eden, dva ali več –, zaenkrat ne vemo. Označimo vodikov atom s H in vodikovo molekulo (gručo vodikovih atomov) s [H]. Druge prvine in njihove oznake so še: plini kisik O, dušik N in klor Cl; nekovini ogljik C in žveplo S; ter vse kovine, na primer baker Cu, cink Zn, kositer Sn in železo Fe.

Zgradba spojin

Spojine iz prvin pa so: ogljikov oksid in sub-oksid [CO], žveplov oksid in super-oksid [SO], voda [HO], metan [CH], žveplova in žveplena kislina [HSO], solna kislina [HCl], sodin lug [NaOH], pepelikin lug [KOH], ter morska sol (natrijev klorid) [NaCl], kalijev klorid [KCl] in soliter [KNO]. Za natrij Na in kalij K sicer vemo, da se skrivata v omenjenih spojinah, vendar ju na tej stopnji razvoja še ne znamo osamiti. Množice kovinskih oksidov in sulfidov ne bomo omenjali posebej. Alkohol, vosek in les pa so bolj ali manj nečiste zmesi, v katerih prevladuje trojica C, H in (morda) O.

To so torej kvalitativni opisi nekaterih molekul. Opisujejo, kakšne vrste atomi so združeni v molekuli. Kakšni so kvantitativni opisi – koliko atomov vsake vrste je združenih –, pa bo treba še raziskati. Seveda čaka na obravnavo silna množica molekul. Pri tem bomo nedvomno naleteli na nove vrste atomov; izvleči jih bomo morali iz spojin, kjer se pač skrivajo, in odgovoriti na vprašanje, kakšne lastnosti imajo in koliko jih sploh je. Dela nam ne bo kmalu zmanjkalo. □

12 Svetlobni žarki

Svetlobni žarki – Odboj – Lom – Razklon – Preslikave – Oko – Lupa – Mikroskop – Daljnogled – Čuda neba

12.1 Svetlobni žarki

Svetila

Vsakdanje izkušnje učijo, da iz svetil, recimo iz Sonca ali ognja, nekaj izhaja in se širi v ravnih črtah – žarkih – v vse smeri. Tisto nekaj poimenujemo svetloba. Če svetlobni žarek zadene kakšno oviro, se na njej odbije. Svet vidimo vzdolž tistih žarkov, ki vpadajo v naše oči. Najpreprosteje je, če si predstavljamo, da je svetloba tok posebnih delcev, fotonov.

12.2 Odboj

Zrcaljenje

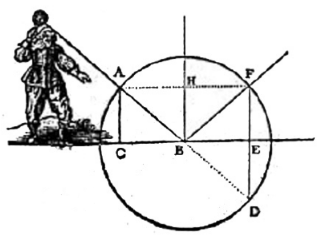
Ko pogledamo v mirno jezero, vidimo v njem *sliko* dreves, ki rastejo na obrežju. Rečemo, da se okolica *zrcali* v jezeru oziroma da je gladina jezera *zrcalo*. Če se nagnemo navpično nad vodo, pa vidimo celo sliko samih sebe. Tudi zloščena kovinska plošča je zrcalo. Kaj od okolice vidimo v njej, je odvisno od tega, kako jo obrnemo in od kod jo gledamo. Očitno je takšna priprava zelo koristen pripomoček, če ne za kaj drugega, pa za osebno lišpanje. Iskanje čim boljših zrcal privede sčasoma do steklene plošče s posrebreno zadnjo stranjo. To je *stekleno zrcalo*.

Odbojni zakon

Kako se pa pri zrcaljenju svetloba odbija? Žarek svetlobe naj vpada iz zraka na vodno gladino ali na kakšno drugo zrcalo poševno pod kotom α_i glede na vpadno pravokotnico. Merjenje pokaže, da leži odbiti žarek v ravnini, ki jo tvorita vpadni žarek in vpadna pravokotnica, in da je odbiti kot α_r enak vpadnemu:

$$\alpha_\mathrm{r} = \alpha_\mathrm{i}\,. \tag{12.1}$$

To je *odbojni zakon* (EVKLID). Velja za gladke ravne površine. Če je površina hrapava, pa velja za vsako njeno ploskvico posebej.

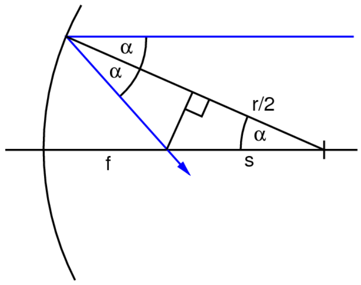


Slika 12.1 Odboj svetlobe na meji dveh snovi. Odbojni kot je enak vpadnemu. (Descartes, 1637)

Odbojni zakon sprejmemo do nadaljnjega kot eksperimentalno dejstvo. Marsikomu pa to ni dovolj in ga poskuša izpeljati iz kakšnih drugih "bolj osnovnih" resnic. Znan je naslednji razmislek. Odbojni kot bi lahko bil večji, manjši ali enak vpadnemu. Predpostavimo, da je manjši. Naj predmet in opazovalec zamenjata mesti. Sedaj bi moral biti kot večji. To je nesprejemljivo. Kota morata torej biti enaka.

Zbiralno zrcalo

Zrcalo preusmerja žarke, ki padajo nanj od koderkod, vsakega v skladu z odbojnim zakonom. Posebej odlikovani so žarki, ki prihajajo neposredno od Sonca: njihov odboj ustvarja v okolici, na primer na zidu, svetlo liso. Otroci ji pravijo "zajček", ker pač tako hitro skače, ko vrtimo zrcalo. Če isto mesto na zidu osvetljuje več zrcal hkrati, postane zajček svetlejši. Ko tja postavimo roko, pa čutimo povečano segrevanje. Očitno bi lahko s primerno razporeditvijo mnogih zrcal usmerili Sončeve žarke v eno točko, kjer bi z njimi prižigali snovi. Ponuja se vboklo *krogelno zrcalo*. Risba in poskus, oba pokažeta, da takšno zrcalo res preoblikuje vzporeden snop žarkov v stožčastega. Točko, kjer se žarki sekajo, poimenujemo *gorišče*.



Slika 12.2 Odboj svetlobe na krogelnem zrcalu. Vzporedni žarki se zbirajo v gorišču. Goriščna razdalja znaša polovico krivinskega polmera.

Slika pove $(r/2)/s = \cos\alpha$. Če je kot α majhen, je kosinus približno enak 1 in

$$f = \frac{r}{2}\,. \tag{12.2}$$

Enačba velja za žarke, ki so blizu osi, to je za zrcala, katerih premer je majhen v primerjavi z radijem ukrivljenosti. Bolj oddaljeni žarki imajo gorišče bliže temenu.

12.3 Lom

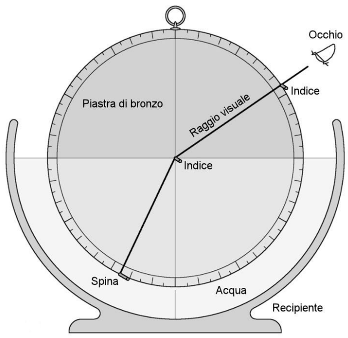
Ravna palica, ki jo poševno vtaknemo v jezero, je videti pri gladini zlomljena. Očitno se žarki, izhajajoči iz potopljenega dela, na gladini lomijo. Predvidevamo, da se vsak žarek, ki vpada iz ene prozorne snovi v drugo, recimo iz vode v zrak ali iz zraka v vodo, razcepi v dva žarka: eden se odbija nazaj in drugi se lomi naprej. Merjenje kotov potrdi domnevo in pokaže naslednje.

Lomni zakon

Vpadni, odbiti in lomni žarek ležijo v isti ravnini. Pri prehodu iz zraka v vodo je lomni kot α_t glede na izstopno pravokotnico manjši kot vpadni kot α_i. Če obrnemo smer žarka, se lomna pot ne spremeni. Za različne vpadne kote iz zraka v vodo velja

$$\frac{\sin\alpha_\mathrm{i}}{\sin\alpha_\mathrm{t}} = n\,. \tag{12.3}$$

To je *lomni zakon* (SNELL). Konstanta *n* pove, kako močno se žarek lomi; poimenujemo jo *lomni količnik* in je odvisna od vrste snovi. Za vodo znaša 1,3 in za steklo 1,5. Snov z večjim lomnim količnikom bomo poimenovali optično gostejšo. Steklo je torej optično gostejše od vode.



Slika 12.3 Lom svetlobe na vodni gladini. Prikazana je naprava za udobno merjenje vpadnih in lomnih kotov. (Museo Galileo, Firence)

Lomni količnik

Lomni količnik n opisuje lom žarka pri prehodu iz ene snovi v drugo, recimo iz zraka v vodo. Kadar je potrebna večja natančnost izražanja, mu rečemu *relativni* lomni količnik n_{12}. Prehod iz vakuuma v eno ali drugo snov pa opisuje *absolutni* lomni količnik n_1 ali n_2. Absolutni lomni količnik zraka je praktično enak 1. Primerjava izmerjenih absolutnih in relativnih količnikov za vodo in steklo pokaže

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}\,. \tag{12.4}$$

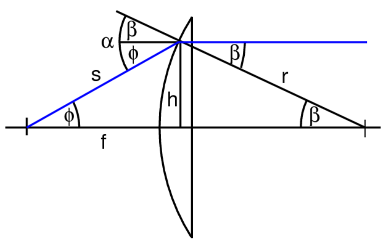
Za lom iz vode v steklo torej velja $n = 1{,}5/1{,}3 = 1{,}15$. Žarek se lomi manj, kot bi se, če bi vpadal iz zraka v steklo.

Popolni odboj

Žarek, ki vpada iz optično gostejše v optično redkejšo snov, recimo iz vode v zrak, se lomi proč od vpadne pravokotnice. Pri dovolj velikem vpadnem kotu doseže lomni kot 90°. Pri še večjem kotu pa se žarek sploh ne lomi več, ampak se le odbije. Ta mejni kot poimenujemo kot popolnega odboja in je določen z lomnim zakonom $1/\sin\alpha = n$. Za prehod iz vode v zrak znaša 49°. Ribam, ki gledajo navzgor, se kaže celotni zunanji svet skozi omejen nadglaviščni krog.

Zbiralna leča

Videli smo, da primerno ukrivljena odbojna površina – zbiralno zrcalo – preoblikuje vzporeden snop žarkov v stožčastega; žarki se sekajo v gorišču. Pričakujemo, da kaj takega zmore tudi primerno ukrivljena lomna površina. Pravzaprav jo že poznamo [4.7]: to je krogelna ploskev na vsaki strani *zbiralne leče*.



Slika 12.4 Lom svetlobe na plankonveksni leči. Vzporedni žarki se zbirajo v gorišču.

Iz risbe ugotovimo naslednje. Naj bodo koti φ, β in α majhni, tako da so njihovi sinusi enaki kotom samim. Potem velja $h/s = \varphi$,

$h/r = \beta$ in $\alpha = \varphi + \beta$. Iz prvih dveh enačb izrazimo h in ju izenačimo. V dobljeno enačbo vstavimo kot φ iz tretje enačbe, delimo z β in upoštevamo lomni zakon $\alpha/\beta = n$. Tako dobimo

$$\frac{1}{f} = (n-1)\,\frac{1}{r}\,. \tag{12.5}$$

Če staknemo dve "plankonveksni" leči z radijema r_1 in r_2 v "bikonveksno" lečo, se kar ne moremo upreti domnevi, da ima slednja goriščno razdaljo

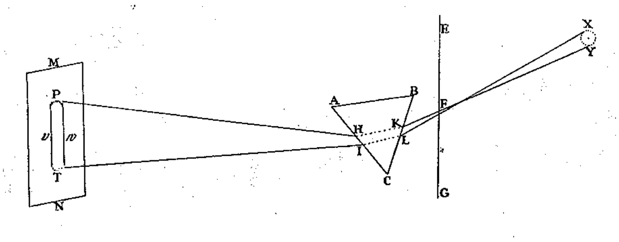
$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}). \tag{12.6}$$

Bolj kot je leča zakrivljena, krajša je torej njena goriščna razdalja. Enačba velja za leče, ki so tanke v primerjavi z goriščno razdaljo, in za žarke, ki so blizu osi. Bolj oddaljeni žarki imajo krajše goriščne razdalje. Lomni količnik je relativen glede na okolišnjo snov: leča, potopljena v vodo, ima večjo goriščno razdaljo kot na zraku.

12.4 Razklon

Mavrica

Svetloba, ki jo leča zbere v gorišču, ima barvaste robove. Kaže, da je bela sončna svetloba sestavljena iz raznovrstnih žarkov, ki se različno lomijo in jih vidimo kot različne barve. Ta *razklon svetlobe* je bolje viden, ko namesto leče vzamemo trikotno stekleno prizmo in nanjo spustimo ozek žarek svetlobe. Žarek se po dvakratnem lomu skozi rob prizme na zaslonu razpotegne v mavrični trak – *svetlobni spekter* (NEWTON). Najmanj se lomi rdeča in najbolj vijolična svetloba. Druga, nasprotno obrnjena prizma spekter spet združi v belo svetlobo.



Slika 12.5 Razklon sončne svetlobe v barvni spekter pri prehodu skozi stekleno prizmo. (Newton, 1730)

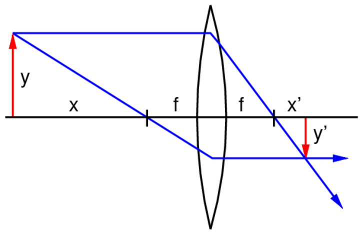
Barve predmetov

S tem je razložena uganka barv pri različnih predmetih. Vrtnica je rdeča, ker pač najbolj odbija rdečo svetlobo, druge pa bolj ali manj vpija. Obarvano steklo je modro, ker prepušča modro svetlobo, ostale pa vpija. Ko rdečo vrtnico pogledamo skozi modro steklo, pa je seveda črna.

12.5 Preslikave

Lečenje

Iz vsake točke telesa izhajajo svetlobni žarki. Ko padejo na lečo, jih ta lomi. Risba pokaže, da se žarki iz predmeta, postavljenega pred prvo gorišče, združijo v sliko predmeta za drugim goriščem. Slika je obrnjena in se prikaže na zaslonu.



Slika 12.6 Preslikava predmeta z lečo.

Dva podobna trikotnika na levi strani povesta $y/x = y'/f$, tista dva na desni pa $y'/x' = y/f$. Iz vsake enačbe izrazimo y/y', ju izenačimo in dobimo $xx' = f^2$. Če upoštevamo še $x = a - f$ in $x' = b - f$, pa ugotovimo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}\,. \tag{12.7}$$

Predmet na razdalji a pred lečo se preslika na razdaljo b za njo. Neskončno oddaljen predmet ima sliko v gorišču. Bolj ko se predmet bliža prvemu gorišču, bolj se njegova slika oddaljuje od drugega gorišča. Predmet v gorišču naredi sliko v neskončnosti. Kadar pa je predmet bliže od gorišča, nastane njegova navidezna slika na isti strani leče in je na zaslon ne moremo ujeti.

Sestavljene leče

Če staknemo dve leči, delujeta kot ena sama. Rečemo, da je to *sestavljena leča*. Kakšna je njena goriščna razdalja? Svetilo postavimo v gorišče f_1 prve leče. V presledku med lečama nastane vzporeden snop žarkov, ki ga druga leča zbere v svojem gorišču f_2. Naj bosta leči tanki in blizu skupaj, da za lečje velja $1/a + 1/b = 1/f$. Ker $a = f_1$ in $b = f_2$, sledi

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}\,. \tag{12.8}$$

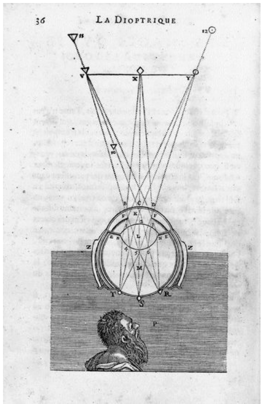
Pri tesnem sestavljanju tankih leč se torej seštevajo recipročne goriščne razdalje. Izdelovalci leč jim rečejo *lomnosti* in njihovo enoto 1/m poimenujejo *dioptrija*. Ko pravilo o seštevanju lomnosti uporabimo za dve plankonveksni leči, ugotovimo, da je dosedanja domneva o gorišču bikonveksne leče (12.6) dokazana.

Akromatsko lečje

Pri preslikavah moti razklon svetlobe. Omilimo ga tako, da namesto ene leče uporabimo dve staknjeni leči, izboklo zbiralno in vboklo razpršilno, vsako iz stekla z drugačnim lomnim količnikom. Razpršilna leča razklanja svetlobo v obratni smeri kot zbiralna in prvotni razklon izniči; hkrati pa zaradi manjšega lomnega količnika ne izniči vse konvergence snopa in lečje ostaja zbiralno. Takšno dvojico leč imenujemo *akromat*.

12.6 Oko

Človeško *oko* je okrogla lupina z odprtino, v kateri je leča. Pred lečo je zakrivljena prozorna roženica. Lupina je napolnjena s prozorno steklovino. Roženica in leča sestavljata lečje, ki meče obrnjeno sliko na ozadje lupine, na mrežnico. Tam so čutnice, ki sporočajo svoje stanje v možgane po vidnem živcu. Možgani to stanje "vizualizirajo", to je, mi vidimo. Posebne mišice spreminjajo zakrivljenost leče in tako ostrijo sliko. Med roženico in lečo je spremenljiva zaslonka, zenica. V močni svetlobi se oži in v šibki se širi.



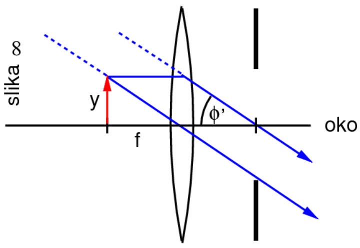
Slika 12.7 Potek žarkov pri očesu. Ukrivljena roženica in leča preslikata predmet v sliko na mrežnici. Da pade slika točno na mrežnico, skrbi leča, ki jo posebne mišice bolj ali manj krivijo. (Descartes, 1637)

Očala

Včasih oko in leča nimata prave oblike ali pa leča ne zmore dobro ostriti slike. Če se snop vstopajoče svetlobe seka pred mrežnico, je goriščna razdalja prekratka in ostro vidimo le bližnje predmete. Oko je *kratkovidno*. Če se snop seka za mrežnico, je goriščna razdalja predolga in ostro vidimo le oddaljene predmete. Oko je *daljnovidno*. Obe napaki zlahko popravimo: pred oko namestimo ustrezno razpršilno ali zbiralno lečo – *očala*.

12.7 Lupa

Čim bolj od blizu gledamo predmet, tem večji se nam kaže. Normalno oko lahko gleda predmet še pri najkrajši razdalji $d_0 = 25\,\mathrm{cm}$. Če predenj postavimo zbiralno lečo, lahko predmet še bolj približamo očesu in ga vidimo večjega. To je *lupa*. Z njo gledamo drobne predmete. Za normalno oko je najbolje, če je predmet v gorišču lupe. Tedaj se očesu zdi, da gleda predmet v neskončnosti in se mu ni treba naprezati.



Slika 12.8 Potek žarkov pri lupi. Predmet, postavljen v gorišče leče, se kaže, kot da bi bil v neskončnosti. Oko ga lahko gleda brez naprezanja.

Čim krajšo goriščno razdaljo f ima lupa, pod tem večjim kotom φ' vidimo predmet. Rečemo, da ima lupa večjo *povečavo*. Slednjo definiramo kot razmerje med naklonoma, pod katerima vidimo opazovani predmet z lupo in brez nje, torej

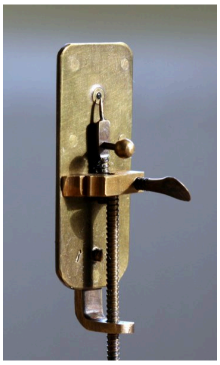
$$N = \frac{\tan\varphi'}{\tan\varphi}\,. \tag{12.9}$$

Za golo oko velja $y/d_0 = \tan\varphi$. Iz risbe razberemo $y/f = \tan\varphi'$. Razmerje obeh tangensov pove

$$N = \frac{d_0}{f}\,. \tag{12.10}$$

Svet žuželk

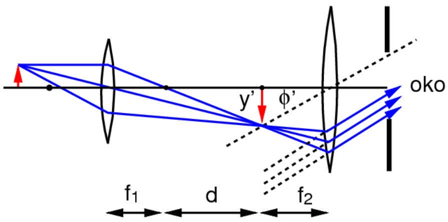
Drobne lupe dosegajo povečave do nekaj desetkrat in pokažejo čudežni svet žuželk.



Slika 12.9 Replika lupe za gledanje majhnih predmetov, ki jo je uporabljal A. Leeuwenhoek. Opazovani predmet je nameščen na konici igle. (Museeum Boerhaave, Leiden)

12.8 Mikroskop

Povečano sliko, ki jo ustvari lupa (objektiv), lahko pogledamo skozi drugo lupo (okular). To je *mikroskop*.



Slika 12.10 Potek žarkov pri mikroskopu. Objektiv naredi povečano sliko predmeta v goriščni ravnini okularja. Ta deluje kot lupa in sliko dodatno poveča.

Risba pokaže $y'/f_2 = \tan\varphi'$. Za golo oko že poznamo $y/d_0 = \tan\varphi$. Razmerje tangensov je torej $y'd_0/yf_2$. Ker pa velja še $y'/d = y/f_1$, ugotovimo, da znaša povečava

$$N = \frac{d}{f_1}\frac{d_0}{f_2}\,. \tag{12.11}$$

Pri tem je d razdalja med notranjima goriščema obeh lup.

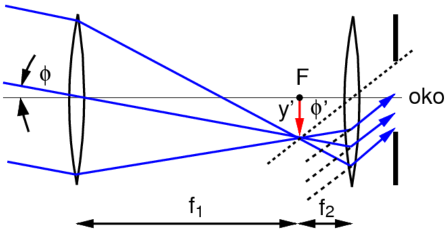
Svet mikrobov

Mikroskop povečuje do nekaj stokrat. Z njim odkrijemo in preučujemo svet enoceličnih bitij. V krvi odkrijemo rdeče krvničke in v semenu semenčice. Opazovani predmet moramo močno osvetljevati, najbolje z vboklim zrcalom, ker je drugače slika pretemna. Pri velikih povečavah postaja slika neostra.

Slika 12.11 Replika mikroskopa za gledanje drobnih premetov, ki ga je uporabljal R. Hooke. Opazovani predmet je osvetljevan s svečo skozi zbiralno stekleno kroglo. (Science Museum, London)

12.9 Daljnogled

Oddaljenih predmetov ne moremo približati, lahko pa jih z dolgogoriščno zbiralno lečo (objektivom) preslikamo v njeno gorišče in sliko opazujemo s kratkogoriščno lupo (okularjem). To je *daljnogled*.



Slika 12.12 Potek žarkov pri daljnogledu. Objektiv naredi sliko neskončno oddaljenega predmeta v goriščni razdalji okularja. Ta deluje kot lupa in sliko poveča.

Za objektiv velja $y'/f_1 = \tan\varphi$ in za okular $y'/f_2 = \tan\varphi'$. Razmerje tangensov, torej povečava, je enaka razmerju obeh goriščnih razdalj:

$$N = \frac{f_1}{f_2}\,. \tag{12.12}$$

Prikazani daljnogled daje obrnjeno sliko. Pri opazovanju neba to ne moti, drugače pa sliko naravnamo z vključitvijo še ene zbiralne leče ali dveh prekrižanih prizem pred okular. Namesto zbiralne leče lahko uporabimo tudi zbiralno zrcalo, ki svetlobe ne razklanja.

Oddaljeni predmeti

Daljnogledi tipično povečujejo od nekajkrat do nekaj stokrat. Ostro oko lahko torej z njimi razločuje kote, dosti manjše od $1'$. Zaradi priročnosti zato vpeljemo *kotno sekundo* kot $1'' = (1/60)'$. Vendar pa velja naslednje. Če je povečava prevelika in premer objektiva premajhen, postane slika razsežnih predmetov temna, ker objektiv ne zbere dovolj svetlobe. N-kratna povečava zahteva N^2-krat več svetlobe. Presek objektiva mora zato biti N^2-krat večji od preseka zenice, to je, njegov premer mora biti N-krat večji od njenega. Premer zenice je tipično 5 milimetrov. Desetkratna povečava zato zahteva premer objektiva 5 centimetrov, stokratna pa že pol metra. Pri takšni povečavi začne motiti migetanje slike, ki ga povzročajo spremembe lomnega količnika v ozračju.

Slika 12.13 Daljnogled za gledanje oddaljenih predmetov. Prikazana je replika prvega zrcalnega daljnogleda, ki ga je lastnoročno izdelal I. Newton. Namesto zbiralne leče na začetku cevi uporablja zbiralno zrcalo na njenem koncu. Svetloba se odbija naprej, kjer jo majhno poševno zrcalo usmeri vstran v okular. (Science Museum, London)

Daljnoglede namestimo na kotomere in s tako narejenimi *teodoliti* močno izboljšamo triangulacijske meritve. Daljnogledi so tudi zelo uporabni na jadrnicah za odkrivanje nevarnih čeri. Ko pa jih usmerimo v nebo, se nam odkrije nov svet.

12.10 Čuda neba

Vesoljski svet

Že majhen daljnogled pokaže naslednje (GALILEI).

Na nebu je mnogo več zvezd, kot jih vidi golo oko. Večji kot je premer objektiva, bolj šibke zvezde postanejo vidne.

Mlečna cesta razpade na gosto kopreno iz zvezd. Ne glede na povečavo pa ostajajo vse zvezde točkaste.

Na Mesecu zrastejo gore in vržejo sence.

Sonca ne smemo gledati neposredno skozi daljnogled, ker bi bilo to zadnje, kar bi videli v življenju. Opazujemo ga s projiciranjem na zaslon za okularjem in odkrijemo temne pege, ki izdajo vrtenje. Najhitrejše so pege na ekvatorju; njihov obhodni čas znaša 24 dni.

Planeti se pokažejo kot drobne okrogle ploskvice, torej krogle.

Venero krasijo mene prav kakor Mesec, in s tem potrdijo, da je notranji planet.

Okrog Jupitra krožijo štiri drobne lune; včasih ga prečkajo in drugič se skrivajo za njim.

Saturn pa pokaže svoj obroč.

Kakšna čuda še čakajo, da jih odkrijemo? □

13 Relativna števila

Relativna števila – Računanje s skalarji – Skalarna potenca – Logaritem – Desetiški logaritem – Logaritemska tabela – Drsno računalo

13.1 Relativna števila

Predznačeni premik

Prebivalcem na morski obali je dobro znano, da gladina morja ni zmeraj enako visoka: včasih je višja in včasih nižja. To se lepo vidi na lesenem pomolskem kolu, ki je zabit v morsko dno. Če v les naredimo vodoravno zarezo na primernem mestu, lahko višino gladine podamo z njeno razdaljo od te zareze – navzgor ali navzdol. Razdaljo na primer 0,5 metra navzgor zapišemo kot +0,5 m in navzdol kot −0,5 m. Vpeljana predznaka "+" in "−" povesta, ali je gladina povišana (povečana) ali znižana (zmanjšana) glede na izhodiščno zarezo.

Pozitivne in negativne vrednosti količin

Podobno kot označujemo višinski odmik (v metrih) morske gladine, lahko opisujemo še marsikaj drugega: časovni odmik (v letih) kakega dogodka od izbranega izhodiščnega dogodka, recimo rojstva preroka Ješue; kotni odmik opoldanskega Sonca (v stopinjah) nad ali pod nebesnim ekvatorjem; in, seveda, prihodek-odhodek denarja ter stanje trgovske blagajne. Tako pravimo: znamenita bitka pri Termopilah se je zgodila leta −480; deklinacija Sonca ob zimskem obratu znaša −23,5°; in stanje v blagajni je padlo, žal, na −300 denarjev. Rekli bomo, da so vse to – čas, kot, blagajniško stanje in drugo – relativne količine, ki imajo *pozitivno* ali *negativno* vrednost (BRAHMAGUPTA).

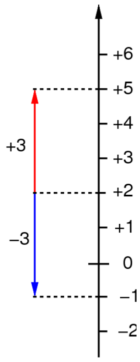
Relativna števila oziroma skalarji

Odmislimo za trenutek merske enote količin in se zanimajmo le za njihove številske vrednosti. Simbolično jih označimo s $+p$ ali z $-p$, pri čemer je p poljubno decimalno število. S tem vpeljemo *relativna števila* oziroma *skalarje* kot "predznačena" decimalna števila. Skalarji so torej razširitev decimalnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer v obliki pozitivnih skalarjev. Kadar nas ne zanima predznak skalarja, ampak le njegova velikost, definiramo še *absolutno vrednost* kot $|\pm p| = p$.

13.2 Računanje s skalarji

Seštevanje

Gladina morja naj ima neko višino, pozitivno ali negativno, $\pm p$. Glede na to višino lahko morje potem naraste ali upade. Porast višine označimo kot $+q$ in upad gladine kot $-q$. Porast in upad sta pravzaprav dve strani istega kovanca in ju zato združimo v skupen pojem, *spremembo*: porast je pozitivna sprememba in upad je negativna sprememba. Nato rečemo, da se je ta sprememba dodala oziroma prištela k obstoječemu stanju. S tem je postavljen model za seštevanje relativnih števil.



Slika 13.1 Seštevanje skalarjev. Vsoto določimo tako, da prvemu sumandu dodamo ali odvzamemo absolutno vrednost drugega sumanda: $(+2)+(+3)=(+5)$ in $(+2)+(-3)=(-1)$. Oklepaje in pozitivne predznake ponavadi kar izpuščamo: $2+3=5$ in $2+(-3)=-1$. Na sliki je prvi sumand pozitiven. Če je prvi sumand negativen, je postopek enak.

Relativna števila torej seštevamo tako, da k prvemu sumandu dodamo ali od njega odvzamemo absolutno vrednost drugega sumanda – dodamo tedaj, če je slednji pozitiven, in odvzamemo, če je negativen:

$$\begin{aligned}(\pm p)+(+q)&=(\pm p)+q \\ (\pm p)+(-q)&=(\pm p)-q\,.\end{aligned} \tag{13.1}$$

Odštevanje

Naj ima morje spet višino $\pm p$, pred tem pa je doživelo spremembo $+q$ (je naraslo) ali $-q$ (je upadlo). Kakšno je bilo morje pred to spremembo? Takšno, kot je obstoječe stanje z odvzeto/odšteto spremembo. S tem je postavljen model za odštevanje relativnih števil:

$$\begin{aligned}(\pm p)-(+q)&=(\pm p)-q \\ (\pm p)-(-q)&=(\pm p)+q\,.\end{aligned} \tag{13.2}$$

Relativna števila torej odštevamo tako, da od prvega člena odvzamemo ali mu dodamo absolutno vrednost drugege člena – odvzamemo tedaj, če je slednji pozitiven, in dodamo, če je negativen.

Pri seštevanju in odštavanju lahko od pozitivnega skalarja odštejemo več, kot je sam velik, in dobimo negativni skalar. K negativnemu skalarju pa tudi lahko prištejemo več, kot je sam velik, in dobimo pozitiven skalar. V množici skalarjev postane odštevanje vedno mogoče.

Množenje

Višina morja se lahko spremeni n-krat za enako spremembo. S tem je definirano množenje skalarja z naravnim številom: $n\cdot(\pm q)=\pm nq$. To nas nujno sili na naslednje definicije za množenje dveh skalarjev:

$$\begin{aligned}(+p)(+q)&=+pq \\ (+p)(-q)&=-pq \\ (-p)(-q)&=+pq\,.\end{aligned} \tag{13.3}$$

Prvi dve definiciji sta samoumevni, saj pozitivni skalar $+p$ upošteva, kot posebne primere, naravna števila n. Tretji produkt pa mora po velikosti tudi znašati pq, le za njegov predznak se moramo odločiti. Ker $-p$ in $-q$ ne moreta tvoriti enako predznačenega produkta kot $+p$ in $-q$, marveč morata tvoriti nasprotno predznačenega, je odločitev na dlani.

Deljenje

Deljenje je obratna operacija od množenja in to sorodnost hočemo ohraniti. Zato so z definicijami za množenje hkrati postavljene tudi definicije za deljenje: kvocient je pozitiven, če imata deljenec in delitelj oba enaka predznaka, sicer pa je negativen.

$$\begin{aligned} (+p)/(+q) &= +p/q \\ (+p)/(-q) &= -p/q \\ (-p)/(-q) &= +p/q\,. \end{aligned} \tag{13.4}$$

S tem so definirane štiri osnovne računske operacije nad skalarji. Definicije zagotavljajo, da še naprej veljajo vsi računski zakoni (2.1), prav kakor so doslej veljali za naravna in za decimalna števila. Skalarje bomo odslej, kadar bo potrebno, označevali z oznakami a, b in c. V takšni oznaki sta torej skrita decimalno število in njegov predznak.

13.3 Skalarna potenca

Negativna potenca

Zaporedje potenc $p, p^2, p^3, p^4 \ldots$ kaže, da je vsaka potenca dobljena z množenjem predhodne s p, in da je vsak eksponent dobljen z povečanjem predhodnega za 1. Seveda velja tudi obratno: vsaka predhodna potenca je dobljena z deljenjem s p in vsak predhodni eksponent je zmanjšan za 1. To nas kar sili, da zapisano vrsto raztegnemo v levo: $\ldots p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2 \ldots$ in na ta način vpeljemo potence z *negativnim eksponentom*

$$p^{-n} = \frac{1}{p^n}\,. \tag{13.5}$$

Z uvedbo negativnih naravnih eksponentov je odpravljena omejenost pravila za deljenje potenc z isto osnovo preko odštevanja njihovih eksponentov: to odštevanje je sedaj vedno izvršljivo. Prav tako lahko majhna števila zapišemo v eksponentni obliki na lepši način, na primer $6{,}4/10^3 = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Ulomna potenca

Drugi koren od p^2 je p; od p^4 je p^2; od p^6 je p^3; nasploh se pri korenjenju sodi eksponenti zmanjšajo na polovico. Prisiljeni smo torej posplošiti, da to velja tudi za preostale, lihe eksponente: koren od p^3 je $p^{3/2}$, od p^5 je $p^{5/2}$ in tako dalje. Podoben razmislek velja za tretji koren in za vse višje korene, ter nas vodi do naslednje definicije potence z *ulomnim eksponentom*:

$$p^{m/n} = {}^{n}\sqrt{p^m}\,. \tag{13.6}$$

Skalarna potenca

Definiciji za negativno potenco in za ulomno potenco zajamemo v razširjeni definiciji za negativno ulomno potenco:

$$p^{-m/n} = \frac{1}{p^{m/n}}\,. \tag{13.7}$$

S tem je definirana *skalarna potenca*: njena baza je (pozitivno) decimalno število in njen eksponent je poljuben skalar. Za takšno potenco ostajajo v veljavi vsa računska pravila kot za "navadno" potenco z naravnim eksponentom (6.2). Prav tako nam ponuja mamljivo možnost, da pozabimo na dosedanje korenske oznake in na pravila za računanje s koreni (6.4), ter namesto obojega uporabljamo kar ulomne eksponente.

13.4 Logaritem

Obrat potence

Vrednost potence $b^L = N$ je odvisna od njene osnove b in eksponenta L. Naj bo osnova znana, recimo 2 ali 10. Potem k vsakemu L pripada nek N, ki ga znamo izračunati. Vendar tudi k vsakemu N pripada ustrezajoč L. Poimenujmo ga *logaritem* baze b "za tvorbo" N in označimo kot $\log_b N$. Velja torej:

$$b^L = N \Longleftrightarrow L = \log_b N\,. \tag{13.8}$$

Pravila logaritmiranja

Pri iskanju logaritma za dano število smo zaenkrat omejeni zgolj na posebne primere. Tako vemo, na primer, da $2^{1/2} = 1{,}41$, zato $\log_2 1{,}41 = 1/2 = 0{,}5$. Takih primerov nam hitro zmanjka. Na srečo se lahko opremo na naslednja pravila, ki vsa sledijo iz pravil za računanje s potencami:

$$\log pq = \log p + \log q \tag{13.9}$$
$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$
$$\log p^a = a \log p\,.$$

Oznako za bazo smo kar izpustili. Če torej poznamo logaritme za posamezna števila, poznamo tudi logaritme za njihove produkte, kvociente in potence. S tem precej razširimo nabor števil, katerim znamo izračunati logaritme.

13.5 Desetiški logaritem

Zaradi desetiškega zapisa števil so posebej odlikovane potence z osnovo 10. Tako zapis $10^L = N$ enolično določa eksponent L, ki "pripada" številu N. Rečemo, da je L *desetiški logaritem* števila N in zapišemo $\log_{10} N = L$. Namesto oznake $\log_{10}$ bomo raje pisali na kratko:

$$\lg p = \log_{10} p\,. \tag{13.10}$$

Kjer ne bo škode, bomo pridevnik "desetiški" kar izpuščali.

Celi in polceli logaritmi

Ker $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ in $10^3 = 1000$, že poznamo logaritme števil 1, 10, 100, 1000; to so: 0, 1, 2, 3. Podobno velja za vse predznačene naravne potence. Kakšni pa so logaritmi drugih števil? Ali poznamo morda kakšen L, da znamo izračunati 10^L? Da, 1/2. Z zaporednim korenjenjem izračunamo:

Tabela 13.1 Zaporedni koreni števila 10.

	10^L	N
$10^{1/2}$ =	$10^{0,500}$ =	3,162
$10^{1/4}$ =	$10^{0,250}$ =	1,778
$10^{1/8}$ =	$10^{0,125}$ =	1,334
	$10^{0,063}$ =	1,155
	$10^{0,031}$ =	1,075
	$10^{0,016}$ =	1,037
	$10^{0,008}$ =	1,018
	$10^{0,004}$ =	1,009
	$10^{0,002}$ =	1,005
$10^{1/1024}$ =	$10^{0,001}$ =	1,002

Tako smo ugotovili logaritme števil 3,162, 1,778 itd; to so 0,500, 0,250 itd. Pa ne samo teh! Če namreč poznamo logaritma L_1 in L_2 od dveh števil N_1 in N_2, poznamo tudi logaritem od števila $N_1 \cdot N_2$; to je $L_1 + L_2$. Tako je na primer logaritem števila $3{,}162 \cdot 1{,}778 = 5{,}622$ enak $0{,}500 + 0{,}250 = 0{,}750$.

S tem se pokaže pot, kako izračunati logaritem poljubnega števila N. Število N zapišemo kot produkt $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \ldots$ tistih števil, katerih logaritme že poznamo, nakar te logaritme seštejemo.

13.6 Logaritemska tabela

Izdelava tabele

Izračunajmo logaritme naravnih števil med 1 in 10! Logaritem ena je nič. Kakšen je logaritem števila dve? Število razcepimo na faktorje iz zgornje tabele. Prvi faktor mora biti manjši in čim bliže 2; to je 1,778. Drugi faktor bi moral biti $2/1{,}778 = 1{,}125$. Takega faktorja v tabeli ni. Prvi od njega nižji je 1,075. To je torej drugi faktor. Tretji faktor bi moral biti 1,125/1,075 in tako naprej. Dobimo: $2 = 1{,}778 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}009$. Ustrezni logaritem je: $0{,}250 + 0{,}031 + 0{,}016 + 0{,}004 = 0{,}301$. S tem določimo logaritem 2, pa tudi logaritme $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2$, $16 = 8 \cdot 2$, $1{,}6 = 16/10$ itd. Podobno izračunamo še logaritme 3, 5 in 7. Vse preostale logaritme določimo iz že izračunanih. Končna tabela, zaokrožena na dve decimalki, je naslednja:

Tabela 13.2 Osnovni desetiški logaritmi.

N	lg N
1	0,00
2	0,30
3	0,48
4	0,60
5	0,70
6	0,78
7	0,84
8	0,90
9	0,95
10	1,00

To je tabela desetiških logaritmov med 1 in 10 s korakom po 1. Omogoča nam poiskati približni logaritem kateregakoli števila, na primer $\lg 35 = \lg 3{,}5 + \lg 10 = 1{,}54$. Pri iskanju logaritma števila 3,5, ki ga ni v tabeli, smo si pomagali z interpolacijo [7.3] med 3 in 4. Z računanjem večjega števila zaporednih korenov in na več decimalk lahko logaritemsko tabelo še mnogo bolj zgostimo, recimo na korak $1 \cdot 10^{-3}$ ali celo na $1 \cdot 10^{-6}$.

Uporaba tabel

Zakaj je dobro imeti podrobno tabelo logaritmov? Zato, ker z njimi lažje izračunamo produkte, kvociente in ulomne potence (torej tudi korene) dolgih števil. Produkt dveh števil izračunamo tako, da poiščemo njuna logaritma, ju seštejemo in nato poiščemo dobljenemu logaritmu ustrezajoče število. Delimo tako, da logaritma odštevamo. Potenciramo pa tako, da logaritem množimo z ulomnim eksponentom. Uporaba logaritmov torej prevede množenje na seštevanje, deljenje na odštevanje in potenciranje na množenje oziroma deljenje. Zakaj si ne bi olajšali življenja, če si ga lahko?

13.7 Drsno računalo

Logaritemske tabele so neudobne za prenašanje. Zato iščemo, kako bi logaritme na kakšen drug način izkoristili za udobno množenje in deljenje. Domnevamo, da bo pri tem osrednjo vlogo igralo pravilo, da je logaritem produkta/kvocienta dveh števil enak vsoti/razliki logaritmov teh dveh števil (13.9). To nam da misliti.

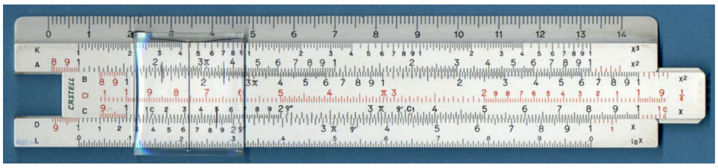
Logaritemske palice

Kaj ko bi imeli deset palic, označenih s številkami od 1 do 10, in z dolžinami $\lg 1$, $\lg 2$ … $\lg 10$ metra? Ko bi staknili palico 2 (z dolžino $\lg 2$) in palico 3 (z dolžino $\lg 3$), bi dobili sestavljeno palico, ki bi bila dolga $\lg 2 + \lg 3$. Ker vemo, da je to enako $\lg (2 \cdot 3) = \lg 6$, bi morala biti sestavljena palica enako dolga kot palica številka 6. Množenje $2 \cdot 3$ bi torej lahko izvedli z "logaritemskimi" palicami takole: na konec palice 2 bi nataknili začetek palice 3 ter pogledali, s katero palico se sestavek ujema. Oznaka te palice bi bila iskani produkt.

Podobno bi izvedli deljenje $6 : 3$. Od konca palice 6 bi položili palico 3 nazaj in pogledali, s katero palico se ujema nepokriti preostanek. Oznaka te palice, to bi bil iskani kvocient.

Logaritemska skala

Seveda ni treba, da snop palic zares izdelamo, ampak jih raje narišemo, kot zareze, na eno samo ploščato palico, "logaritemsko skalo". Na skalo spravimo mnogo več zarez kot deset in jih na primeren način označimo. Tudi ni treba, da je skala dolga en meter, ampak je lahko krajša. Za računanje potem potrebujemo dve taki skali, ki ju premikamo drugo ob drugi. Tako smo izumili *drsno računalo*.



Slika 13.2 Drsno računalo. Osnovni skali sta D in drseči C. Računalo kaže produkt $1{,}24 \cdot 1{,}32 = 1{,}64$. Hkrati kaže kvocient $1{,}64/1{,}32 = 1{,}24$. Skala A je kvadrat skale D in kaže $1{,}64^2 = 2{,}7$ oziroma $\sqrt{2{,}7} = 1{,}64$. Podobno velja za skalo K, ki je kub skale D. Skala L pa je logaritem skale D in kaže $\lg 1{,}64 = 0{,}215$. (Anon)

Z drsnim računalom udobno množimo in delimo, le za lego decimalne vejice v rezultatu moramo poskrbeti sami. Natančnost računanja je tem večja, čim daljši sta obe skali. Pri dolžini 25 cm je dosežena natančnost na 2–3 značilna mesta, kar je mnogokrat povsem dovolj. Uporabnost računala še povečamo, če nanj narišemo druge skale, ki služijo za izračunavanje kvadratov (in korenov), kubov (in kubičnih korenov), logaritmov, kotnih razmerij (sinusov, kosinusov, tangensov) in še marsičesa. □

14 Funkcije in grafi

Funkcije – Zapisi funkcij – Sorazmernost – Obratna sorazmernost – Potenčne funkcije – Polinomske funkcije – Druge funkcije – Prileganje podatkom

14.1 Funkcije

Spremenljivke

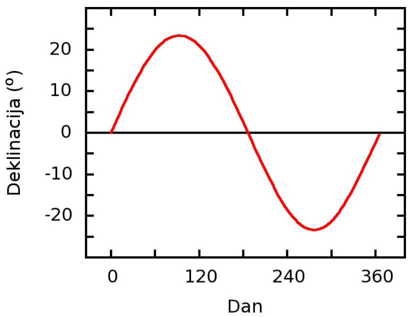
Dnevi se nizajo drug za drugim in štejejo čas, ki je potekel od izbranega dne v preteklosti. Rečemo, da je pretečeni čas t spremenljiva količina oziroma *spremenljivka*. Sonce vsak dan kulminira in njegova deklinacija (kotni odmik od nebesnega ekvatorja) je tudi spremenljivka: od dne do dne se spreminja. V svetu je očitno polno spremenljivk.

Odvisnost spremenljivk

Začenši z dnevom spomladanskega enakonočja lahko za vsak dan v letu izmerimo Sončevo deklinacijo in rezultate zapišemo v *tabelo*. Takšna tabela – ki jo že poznamo [7.3] – kaže, kako se deklinacija spreminja s časom. Deklinacija je odvisna od časa. Rečemo, da je čas *neodvisna spremenljivka* oziroma *argument* in deklinacija *odvisna spremenljivka* oziroma *funkcija*. Kakšna je njuna medsebojna odvisnost, pa kaže tabela.

Graf funkcije

Tabela, ki opisuje medsebojno povezavo dveh spremenljivk, ni posebno pregledna. Mnogo bolj nazorno jo prikažemo z *grafom*: vrednosti neodvisne spremenljivke predstavimo z razdaljami vzdolž vodoravne *abscisne osi*, vrednosti funkcije pa z odmiki vzdolž navpične *ordinatne osi*. Dolžinski enoti vzdolž obeh osi sta poljubni in ju priročno izberemo.



Slika 14.1 Graf deklinacije Sonca v odvisnosti od časa. Čas, merjen v dnevih od pomladnega enakonočja, je neodvisna spremenljivka ali argument. Deklinacija, merjena v stopinjah, pa je odvisna spremenljivka ali funkcija.

Enačba funkcije

Tudi razsežnosti teles so "spremenljive". Tako, na primer, si lahko predstavljamo kroge različnih polmerov. Polmer kroga je tedaj neodvisna spremenljivka. Vemo pa, da je z njegovo izbiro določen tudi obseg: $C = 2\pi r$. Obseg kroga je torej funkcija polmera. Funkcijska odvisnost pa ni podana niti s tabelo, niti z grafom, marveč na posebno odličen način, z *enačbo*. Ko v enačbo vstavimo vrednost za polmer, znamo iz nje izračunati, kakšen je pripadajoči obseg. Na ta način lahko zgradimo ustrezno tabelo in iz nje narišemo graf.

Kar velja za obseg kroga, velja tudi za njegovo ploščino – je funkcija polmera: $S = \pi r^2$. Funkcijska odvisnost pa je sedaj drugačna. In končno je tudi prostornina krogle funkcija polmera: $V = (4\pi/3)r^3$. Očitno obstaja med lastnostmi teles še mnogo funkcijskih povezav.

14.2 Zapisi funkcij

Oblike funkcij

Odmislimo tip spremenljivk (čas, kot, razdalja itd.) in označimo kakršnokoli neodvisno spremenljivko z x in odvisno spremenljivko z u. Kar preostane, so zgolj različne oblike funkcijskih odvisnosti; iz navedenih konkretnih primerov (za krog in kroglo) tako izluščimo naslednje oblike: $u = ax$, $u = ax^2$ in $u = ax^3$, pri čemer je a poljubno, a nespremenljivo število. Takšnemu številu rečemo konstanta ali parameter. Seveda si lahko zamislimo tudi neomejeno mnogo drugačnih oblik.

Eksplicitni in implicitni zapis

Enačba, ki opisuje funkcijsko odvisnost dveh količin, vsebuje dve spremenljivki. Kot že vemo, se enačba ne spremeni, če na levi in desni strani izvedemo isto operacijo. Zato lahko vsako – dovolj pohlevno – funkcijsko odvisnost zapišemo na različne, med seboj enakovredne načine, na primer: $u = ax^2$, $x = \sqrt{(u/a)}$ in $u - ax^2 = 0$. Prvi in drugi obliki rečemo *eksplicitna* in zadnji *implicitna*. Za obe eksplicitni obliki tudi rečemo, da sta druga drugi *obratni*. Splošno povezavo dveh skalarnih količin u in x pa zapišemo simbolično kot $u = f(x)$ ali $x = g(u)$ ali $F(x,u) = 0$.

Funkcije več spremenljivk

Nikjer ni zahtevano, da mora biti funkcija odvisna zgolj od ene neodvisne spremenljivke. Lahko je odvisna od več njih, kakor kaže zgled za prostornino valja: ta je odvisna od njegovega polmera in višine: $V = \pi r^2 h$. Na splošno bomo tako za dve neodvisni spremenljivki zapisali eksplicitno $u = f(x,y)$ (ali katero izmed obeh obratnih oblik) in implicitno $F(x,y,u) = 0$.

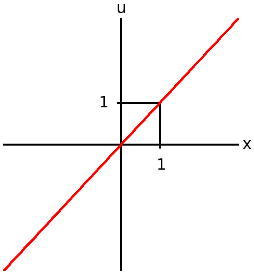
14.3 Sorazmernost

Kadar je kvocient dveh soodvisnih spremenljivk zmeraj enak, kakor na primer kvocient med obsegom poljubnega kroga in njegovim polmerom, imamo opravka s *sorazmernostjo*:

$$u = ax\,. \tag{14.1}$$

Premica

Graf te funkcije narišemo tako, da v primerno izbranih točkah abscise izračunamo ustrezne ordinate in dobljene točke med seboj povežemo. Nastane *premica*. Pravzaprav je dovolj, da določimo le dve točki: $u(0) = 0$ in $u(1) = a$, ter skoznju potegnemo premico. Tako vidimo, kakšen pomen ima koeficient a: označuje nagibni kot φ premice glede na abscisno os, $|a| = \tan\varphi$. Zato mu rečemo tudi smerni koeficient. Večji kot je, bolj strma je premica. Kadar je negativen, je premica padajoča.



Slika 14.2 Sorazmernost dveh količin $u = ax$. Graf je premica skozi izhodišče. Slika velja za koeficient $a = 1$. Večji kot je, bolj strma je premica. Če je koeficient negativen, je premica prezrcaljena preko abscisne osi, torej padajoča.

Obratna funkcija k sorazmernosti je tudi sorazmernost: $x = u/a$. Le smerni koeficient je zdaj drugačen, namreč $1/a$. Ni treba risati novega grafa, ampak že obstoječega pogledamo "od strani": ne torej vzdolž osi x, na katero so nataknjene ordinate, ampak vzdolž osi u, na katero so nataknjene abscise. Kogar to moti, lahko graf zavrti v nasprotni smeri urinega kazalca za 90°. Os x postane navpična in os u vodoravna. Da kaže v levo namesto v desno, pa je zanimiva poživitev.

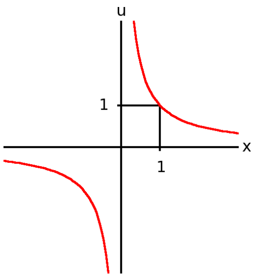
14.4 Obratna sorazmernost

Kadar je produkt dveh soodvisnih spremenljivk zmeraj enak, kakor na primer produkt med silo in potjo pri dvigu bremena po poljubnem klancu na dano višino, imamo opravka z *obratno sorazmernostjo*:

$$u = \frac{a}{x}\,. \tag{14.2}$$

Hiperbola

Izračunamo ordinate v primernih pozitivnih abscisnih točkah, na primer 0, 1/2, 1, 2 in ∞ (neskončno), ter jih povežemo. Enako storimo za ustrezne negativne točke. Nastane *hiperbola*. Definirana je v vsaki abscisni točki razen v izhodišču, kjer je neskončna. Rečemo, da ima tam *pol* oziroma da je ordinatna os *navpična asimptota* hiperbole. Daleč proč od izhodišča pa se čedalje tesneje približuje abscisni osi. Rečemo, da je ta *vodoravna asimptota*. Koeficient a določa, koliko je teme hiperbole oddaljeno od izhodišča.



Slika 14.3 Obratna sorazmernost dveh količin $u = a/x$. Graf poimenujemo hiperbola. Slika velja za koeficient $a = 1$. Večji koeficient pomeni večji odmik temena hiperbole od izhodišča. Če je koeficient negativen, je graf prezrcaljen preko abscisne osi.

Obratna funkcija k obratni sorazmernosti je tudi obratna sorazmernost: $x = a/u$. Še celo koeficient je isti. Funkcijo vidimo, ko obstoječi graf pogledamo "od strani".

14.5 Potenčne funkcije

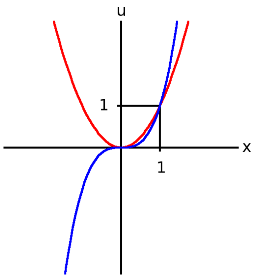
Naslednja vrsta funkcij, srečanih doslej, so naravne potence, na primer odvisnost med ploščino kroga in njegovim polmerom, ali med prostornino krogle in njenim polmerom:

$$u = ax^n \,. \tag{14.3}$$

Parabole

Graf kvadratne potence $u = ax^2$ poteka iz točke $u(0) = 0$ skozi $u(1) = a$ in naprej s čedalje večjo strmino. Graf je simetričen glede na ordinatno os: $u(-x) = u(x)$. Negativni koeficient a pomeni, da graf iz izhodišča pada, ne raste. Vse druge sode potence – njihovi eksponenti so mnogokratniki števila dve – imajo podobne grafe. Rečemo jim *sode parabole*.

Tudi graf kubne potence $u = ax^3$ poteka iz točke $u(0) = 0$ skozi $u(1) = a$ in naprej čedalje bolj strmo. Vendar je sedaj graf simetričen glede na izhodišče: $u(-x) = -u(x)$. Negativni koeficient a pomeni, da graf skozi izhodišče pada, ne raste. Vse druge lihe potence – tiste, ki niso sode – imajo podobne grafe. Rečemo jim *lihe parabole*.



Slika 14.4 Potenčna odvisnost količin $u = ax^2$ (rdeča) in $u = ax^3$ (modra). Grafa imenujemo paraboli, kvadratno in kubno. Slika velja za koeficienta $a = 1$. Večji koeficient pomeni bolj strmo naraščanje. Če je koeficient negativen, je graf prezrcaljen preko abscisne osi.

Obratne funkcije k potenčnim so korenske funkcije. Njihovi grafi so "od strani gledani" grafi potenčnih funkcij. Lihi koreni so definirani za vse vrednosti argumenta, sodi pa le za pozitivne. Grafi slednjih so tudi dvolični: eni vrednosti argumenta ustrezata kar dve vrednosti funkcije, namreč pozitivni in negativni koren.

14.6 Polinomske funkcije

Linearna funkcija

V dosedanjih funkcijah so nastopali le produkti in kvocienti spremenljivk in parametrov (naravne potence so pravzaprav tudi le produkti). Vpeljimo še vsote in razlike! Najpreprostejša tovrstna funkcija je

$$u = ax + b \,. \tag{14.4}$$

Rečemo ji *linearna funkcija*. Od sorazmernosti se razlikuje po dodatnem členu b. Zato je njen graf že poznana premica, vendar premaknjena iz izhodišča paralelno vzdolž ordinatne osi za b; navzgor, če je pozitiven, in navzdol, če je negativen.

Kje premica seka ordinatno os, izračunamo tako, da v enačbo vstavimo $x = 0$ in izračunamo u. Seveda dobimo $u = b$. Presečišče premice z abscisno osjo pa dobimo tako, da v enačbo vstavimo

$u = 0$, s tem pridelamo *linearno enačbo* $ax + b = 0$ in iz nje izračunamo $x = -b/a$.

Kvadratna funkcija

Naslednja po vrsti je *kvadratna funkcija*:

$$u = ax^2 + bx + c\,. \tag{14.5}$$

Kakšen je njen graf? Če $b = 0$, je očitno že znana parabola, premaknjena vzdolž ordinatne osi za c gor ali dol. Linearni člen bx pa vse skupaj zaplete. Bi se ga morda lahko znebili? Da, s pretvorbo funkcije v "temensko" obliko $u = a(x + b/2a)^2 - (b^2/4a) + c$, torej v kvadratno funkcijo $u = aX^2 + D$ z novo neodvisno spremenljivko $X = x + b/2a$ in z novim konstantnim členom $D = c - b^2/4a$. To pa že znamo narisati: teme ima pri $X = 0$, to je pri $x = -b/2a$, in premaknjeno je po navpičnici za D.

Presečišče parabole z ordinatno osjo določimo tako, da izračunamo vrednost kvadratne funkcije za $x = 0$. Dobimo $u = c$. Določitev presečišč z abscisno osjo pa vodi do *kvadratne enačbe* v temenski obliki; po ločitvi členov in korenjenju dobimo dve formalni rešitvi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}\,. \tag{14.6}$$

Dve dejanski rešitvi – skalarja – dobimo le tedaj, ko je podkorenski izraz pozitiven.

Višji polinomi

Z dodajanjem čedalje višjih potenc lahko nadaljujemo v nedogled. Tako dobimo *polinomske funkcije* višjih stopenj. Linearna funkcija je polinom prve stopnje in kvadratna funkcija je polinom druge stopnje. V polinomu stopnje n, daleč proč od izhodišča, prevladuje člen ax^n: po absolutni vrednosti je večji od vseh ostalih. Tako se graf tudi vede: daleč proč od izhodišča je podoben ustrezni potenčni funkciji. Blizu izhodišča pa seveda vijuga po svoje. Ker ima linearna funkcija največ eno ničlo, kvadratna pa dve, predvidevamo, da ima tak polinom največ n ničel.

14.7 Druge funkcije

Gradnja funkcij

Polinome lahko med seboj seštevamo, odštevamo, množimo in delimo. V prvih treh primerih spet dobimo polinom. V zadnjem primeru pa dobimo *racionalne* funkcije in njim ustrezajoče grafe ter enačbe. Posebno preprost primer je že poznana obratna sorazmernost. Če jih še korenimo, pa dobimo prav hude *iracionalne* funkcije. Vse skupaj – polinome, racionalne in iracionalne funkcije – poimenujemo algebrajske funkcije. S tem pravzaprav izrazimo pričakovanje, da morda obstajajo še druge, recimo jim *transcendentne* funkcije. Če bomo katero kdaj srečali in bo pomembna, se ji bomo posvetili tedaj.

Preoblikovanje grafov

Risanje grafov za linearno in kvadratno funkcijo nam kaže, kako lahko dani graf $u = f(x)$ preoblikujemo in dodelujemo. — Premaknemo ga vzdolž abscisne osi: $x \to x - a$ in vzdolž ordinatne osi: $u \to u - a$. Če je a pozitiven, je premik usmerjen v desno (naprej), sicer v levo (nazaj). — Raztegnemo ga vzdolž abscisne osi: $x \to x/a$ in vzdolž ordinatne osi: $u \to u/a$. Če je a večji od ena, se graf raztegne, sicer skrči. — Prezrcalimo ga preko abscisne osi: $x \to -x$ ali preko ordinatne osi: $u \to -u$. Funkcije, za katere velja $f(-x) = f(x)$, so torej simetrične glede na ordinatno os; po zgledu sodih potenc jih poimenujemo *sode funkcije*. Funkcije $f(-x) = -f(x)$ so simetrične glede na izhodišče in jim iz podobnega razloga rečemo *lihe funkcije*.

Reševanje enačb

Reševanje linearne in kvadratne enačbe nam ponuja tudi zgled, kako reševati poljubno enačbo $F(x,a) = 0$, pri čemer smo z a označili enega ali več njenih parametrov. Cilj nam je, da enačbo preoblikujemo v obliko $x = f(a)$, pri čemer je $f(a)$ izračunljiv številski izraz. Enačba se pri tem ne spremeni, če nad levo in desno stranjo uporabimo enako operacijo: kaj prištejemo ali odštejemo; s čim pomnožimo ali delimo; potenciramo; korenimo; in podobno. Seveda pa ni nobenega zagotovila, da bo vsaka enačba, ki jo bomo kdaj srečali, tudi rešljiva.

14.8 Prileganje podatkom

Interpolacija

Funkcija, ki je opisana s tabelo, je poznana zgolj v posameznih točkah. Kakšne pa so vrednosti med dvema točkama $u_1 = u(x_1)$ in $u_2 = u(x_2)$? Najlažje je, če tam aproksimiramo funkcijo s premico. V vmesni točki x ima funkcija potem vrednost $u = u_1 + (x - x_1)(u_2 - u_1)/(x_2 - x_1)$. To je *linearna interpolacija*. Ne da bi kaj dosti premišljevali, smo jo doslej že večkrat uporabili: pri tabelah sončnih deklinacij [7.3] in anomalij [7.6] ter pri tabelah kotnih razmerij [8.5] in logaritmov [13.6]. Zdaj, ko smo spoznali linearno funkcijo, smo interpolacijski obrazec tudi zapisali.

Enačba grafa

Če je funkcija podana z enačbo, izračunamo in narišemo njen graf bolj ali manj zlahka. Obratna pot je mnogo težja: če poznamo kakšen graf, s katero enačbo bi ga opisali? Ne gre drugače, kot da ga primerjamo z grafi že poznanih funkcij, ugotovimo, kateremu je najbolj podoben in nastavimo funkcijske parametre tako, da je ujemanje najboljše.

Poglejmo najpreprostejši primer, ko nas izmerjene točke (x,u) vabijo, da skoznje potegnemo premico. To storimo tako, da se odmiki merskih točk od nje navzgor in navzdol "izravnajo". Izravnavanje ocenimo kar na oko, vendar upamo, da bomo kdaj v prihodnje našli bolj "objektiven" način. S tem smo merske podatke aproksimirali z grafom linearne funkcije $u = ax + b$. Vrednost parametra a določimo iz strmine narisane premice:

$a = \Delta u / \Delta x$. Parameter b pa je podan s presečiščem premice in ordinatne osi.

Kaj pa, če je funkcija videti kot potenčna funkcija $u = ax^n$? Tedaj enačbo logaritmiramo in dobimo $\lg u = n \lg x + \lg a$, kar je linearna funkcija $U = nX + A$ z novima spremenljivkama in z novim parametrom. Narišemo merske točke (X, U) in – če res tvorijo premico – po že znani metodi določimo vse parametre. Seveda velja postopek le, kadar so vrednosti logaritmiranih količin pozitivne. Eksponent pa je lahko pozitiven ali negativen. □

15 Posebne funkcije

Posebne funkcije – Geometrijska vrsta – Binomska vrsta – Eksponentna funkcija – Logaritemska funkcija – Kotne funkcije – Kotne tabele – Grafi kotnih funkcij – Obratne kotne funkcije

15.1 Posebne funkcije

Tipi funkcij

Funkcije, ki smo jih obravnavali do sedaj, so bile bodisi polinomi, bodisi njihovi kvocienti ali koreni. Vprašali smo se tudi, ali morda v naravi obstajajo še kakšne odvisnosti, ki jih ne moremo opisati z omenjenimi "algebrajskimi" funkcijami. Kje naj iščemo take posebne, "transcendentne" funkcije? V doslej skritih kotičkih matematike in narave!

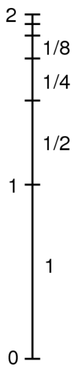
15.2 Geometrijska vrsta

Polinome lahko zgradimo iz toliko členov, kot hočemo. Kaj če bi uporabili neskončno mnogo členov? Najpreprostejši tovrstni izraz je naslednji:

$$G = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{15.1}$$

Konvergenca

To je *geometrijska vrsta*. V principu lahko za vsak argument x izračunamo vsoto iz toliko vodilnih členov, kot hočemo. Za $x = 0$ je vrsta trivialno enaka 1. Za $x = 1$ vsota očitno narašča preko vsake meje, prav tako za argumente $x > 1$. Za $x = 1/2$ pa se vsota čedalje tesneje bliža k vrednosti $G = 2$. To uvidimo takole: na palico enotne dolžine nataknemo polovico te palice, nato polovico polovice in tako dalje. Rečemo, da vsota *konvergira* k navedeni *limiti* oziroma da je vrsta *konvergentna*.



Slika 15.1 Vsota geometrijske vrste $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ konvergira k 2. Količnik med dvema zaporednima členoma, kjerkoli v vrsti, znaša 1/2. Vrste z drugačnim količnikom, vendar manjšim od 1, tudi konvergirajo.

Limitne vsote

Pričakujemo, da geometrijska vrsta konvergira za vsak argument, ki je absolutno manjši od 1. Kako to dokazati in kako najti ustrezne limite? Delno vsoto $G = 1 + x + x^2 + \dots x^n$ pomnožimo na obeh straneh z x ter dobimo $xG = x + x^2 + \dots x^{n+1}$. Obe enačbi med seboj odštejemo ter pridelamo $(1-x)G = 1 - x^{n+1}$ oziroma $G = (1 - x^{n+1}) / (1-x)$. Nato povečujemo n proti neskončnosti. Člen x^{n+1} se pri tem zmanjšuje na nič, če je le $|x| < 1$. Preostane

$$G = \frac{1}{1-x}\,, |x| < 1\,. \tag{15.2}$$

Vrsta je torej res konvergentna (za navedene argumente) in za vsak argument tudi vidimo, kam vrsta konvergira. Za $x = 1/3$, na primer, konvergira proti $G = 3/2$.

15.3 Binomska vrsta

Potence binoma

Posebno lepe polinome dobimo, če izračunamo potence binoma $(1+x)^n$ za naraščajoče vrednosti eksponenta n. Pridelani polinom stopnje n ima $n+1$ členov, vsebujočih potence x^0, x^1, x^2 in tako naprej do x^n. Koeficienti pred njimi so pozitivni in simetrični:

```
n = 0        1
n = 1       1 1
n = 2      1 2 1
n = 3     1 3 3 1
n = 4    1 4 6 4 1
```

Vsak koeficient je vsota dveh koeficientov, ki ležita nad njim. Z nekaj truda nam uspe najti naslednji vzorec

$$B = (1+x)^n = \tag{15.3}$$
$$1 + \frac{n}{1}\,x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \ldots + x^n\,.$$

Binomska vrsta

Razvoj potence binoma v polinom velja, če je eksponent n naravno število. Kaj pa, če stisnemo zobe in za eksponent zapišemo skalar s, recimo $-1/2$? Leva stran ima potem še vedno svoj pomen, saj postane splošna potenca. Desna stran pa se ne konča, ampak število členov naraste brez konca:

$$B = (1+x)^s = \tag{15.4}$$
$$1 + \frac{s}{1}\,x + \frac{s(s-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \ldots\,.$$

Rečemo, da je nastala *binomska vrsta*. Zelo je podobna geometrijski vrsti, saj v njej prav tako nastopajo zaporedne potence, le koeficienti pri njih so drugačni. Obe vrsti imata obliko

$$u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots \tag{15.5}$$

Takšne vrste imenujemo *potenčne vrste*. Pričakujemo, da bomo kakšno še srečali.

V principu lahko v binomski vrsti izračunamo toliko členov, kolikor hočemo. Pojavita pa se seveda dve vprašanji: ali in za kakšne argumente je vrsta konvergentna ter ali je njena vsota (za vsak legitimni argument) enaka potenci na levi strani.

Konvergenčni kriterij

Binomska (in tudi drugačna potenčna) vrsta je gotovo konvergentna, če so vsi njeni repni členi (absolutno) manjši od ustrezajočih členov konvergentne geometrijske vrste. Končno število začetnih členov pač ne šteje. Pri geometrijski vrsti so, kot vemo, kvocienti zaporednih členov konstantni in absolutno manjši od ena. Kakšna pa je stvar pri binomski vrsti? Ne pričakujemo, da bodo kvocienti konstantni, saj bi na ta način imeli opravka spet z geometrijsko vrsto. Mogoče pa je, da (pri izbrani vrednosti argumenta) limitirajo h kakšni vrednosti r, in je ta vrednost absolutno manjša od 1. Potem je binomska vrsta res členoma omejena z geometrijsko vrsto s koeficientom r. Pogoj za konvergenco binomske (in tudi druge potenčne) vrste je torej

$$|u| < \infty \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| < 1\,. \tag{15.6}$$

Oznaka $\lim n \to \infty$ pomeni limitno vrednost kvocientov pri pomikanju vzdolž neskončnega repa. Kvocient a_{n+1}/a_n v binomski vrsti znaša $(s-n)/(n+1)$. Pri velikih n postane enak -1, zato pride do konvergence le za $|x| < 1$. Da pa so iz vrste izračunane vrednosti res enake potenci na levi, se prepričamo z nekaj konkretnimi izračuni.

Konvergenčni kriterij tudi pove, da v vsaki konvergentni vrsti (absolutna) velikost členov pada proti nič. Morda je res tudi obratno? Žal ne. Znana je namreč "harmonična" vrsta $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$, ki ne konvergira. To uvidimo takole. Dva člena $(1/3 + 1/4)$ sta večja od 1/2. Štirje členi $(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$ so tudi večji od 1/2 in tako naprej. Celotna harmonična vrsta je torej večja od vrste $1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots$, ki pa je očitno divergentna.

Računska uporaba

Binomska vrsta je zelo primerna za izračun korenov. Številu A, ki ga hočemo koreniti, poiščemo primeren približni koren a in zapišemo $A = a^2 + b = a^2(1 + b/a^2)$, torej $A^{1/2} = a \cdot (1 + b/a^2)^{1/2}$. Paziti moramo le, da je drugi člen binoma manjši od 1. Čim manjši je, tem bolje. Potem binom razvijemo v vrsto in izračunamo ter seštejemo nekaj prvih členov. Včasih je dovolj že en sam. Podobno računamo tudi višje korene.

15.4 Eksponentna funkcija

Obrestovanje

Posojeni denar u_0 "raste" s pretečenimi leti N, kakor pove že spoznana obrestno obrestna enačba (6.6): $u = u_0\,(1 + p)^N$. Pri tem se količina denarja povečuje konec vsakega leta. To ni čisto "pošteno", pravijo pohlepni posojilodajalci; bolj "prav" bi bilo, da se povečuje v krajših časovnih korakih, recimo vsake $1/n$ leta, in sicer za ustrezno manjšo obrestno mero p/n. Potem nastane po N letih $u = u_0\,(1 + p/n)^{nN}$ denarja. Čim krajši je časovni interval obrestovanja, to je, čim večji je n, tem bolj denar zraste v opazovanem številu let.

Eksponentna vrsta

Zapisani binom lahko polepšamo. Najprej ga s substitucijo $p/n = 1/m$ spremenimo v obliko $(1 + 1/m)^{mpN}$ in nato s substitucijo

$pN = x$ v obliko $(1 + 1/m)^{mx}$. Slednjo razvijemo v binomsko vrsto. Nato privzamemo, da je m zelo velik in zanemarimo tiste člene, ki imajo v imenovalcih potence m. Tako pridelamo naslednjo potenčno vrsto za x in z njo definiramo novo, *eksponentno funkcijo*:

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{15.7}$$

Zaradi krajšega pisanja smo uvedli oznako $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$, *fakulteto*. Z naraščajočim k limitira razmerje zaporednih členov $|x/(k+1)|$ proti nič in sicer za vsakršno vrednost argumenta. Vrsta je torej konvergentna za $|x| < \infty$.

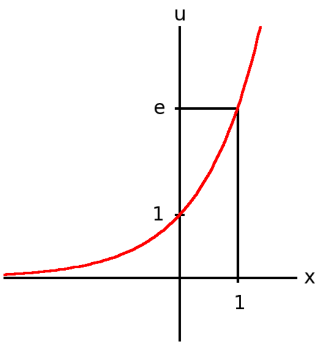
Eksponentna funkcija pove, za kakšen faktor naraste začetna količina denarja, ki se nenehno obrestuje, če poznamo produkt med njegovo obrestno mero na časovno enoto (p) in pretečenimi časovnimi enotami (N). Pri $p = 0{,}05$/leto in $N = 10$ let je torej treba izračunati $\exp(pN) = \exp(0{,}5)$. Vidimo tudi, da dvakrat večja obrestna mera naredi v dvakrat krajšem času enako mnogo denarja.

Eksponentna funkcija

Ko v eksponentno vrsto vstavimo $x = 1$ in seštejemo nekaj prvih členov, dobimo 2,71. To je približek, na tri mesta, k številu e, ki bi ga dobili s seštevanjem "vseh" členov. Ker je $(1 + 1/m)^{mx}$ enako $[(1 + 1/m)^m]^x$, uvidimo še

$$\mathrm{e}^x = \exp(x). \tag{15.8}$$

Eksponentna funkcija je torej potenca z osnovo e in z eksponentom kot spremenljivko. S tem smo tudi upravičili njeno ime. Tako raste denar, število ljudi v ugodnih razmerah in še marsikaj.



Slika 15.2 Graf eksponentne funkcije $u = \mathrm{e}^x$. Bolj splošna funkcija $u = A\mathrm{e}^{kx}$ seka ordinatno os v A, s k pa je urejena tamkajšnja strmina. Negativni vrednosti prvega in drugega parametra pomenita zrcaljenje preko abscisne in ordinatne osi.

Eksponentne funkcije ni dobro zamenjati s potenčno, ki ima osnovo, ne eksponent, za spremenljivko.

15.5 Logaritemska funkcija

Naravni logaritem

K eksponentni funkciji obstaja obratna funkcija – logaritem z osnovo e. Rekli mu bomo *naravni logaritem*:

$$u = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow \log_{\mathrm{e}} u = x\,. \tag{15.9}$$

Namesto $\log_e$ bomo raje pisali krajše:

$$\ln u = \log_e u\,. \tag{15.10}$$

Graf logaritma je – kakor mora biti – s strani pogledan graf za eksponentno funkcijo. Definiran je le za pozitivne vrednosti argumenta.

Sprememba logaritemske baze

Vrednosti eksponentne funkcije zlahka izračunamo iz njene vrste in jih tabeliramo. S tem hkrati izdelamo tabelo za naravne logaritme. Pojavi se vprašanje, ali morda lahko iz znanih naravnih logaritmov izračunamo desetiške. Da: iz $u = 10^x$ z naravnim logaritmiranjem dobimo $\ln u = x \ln 10$ in z desetiškim logaritmiranjem $\lg u = x$ ter iz obojega

$$\lg u = \frac{\ln u}{\ln 10}\,. \tag{15.11}$$

Logaritma sta sorazmerna. Sorazmernostni koeficient izračunamo z eksponentno vrsto: $\ln 10 = 2{,}30$.

Sprememba eksponentne baze

Morda lahko povežemo tudi eksponentni funkciji z osnovo e in z osnovo 10? Spet da: iz $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sledi

$$10^x = \mathrm{e}^{x \ln 10}\,. \tag{15.12}$$

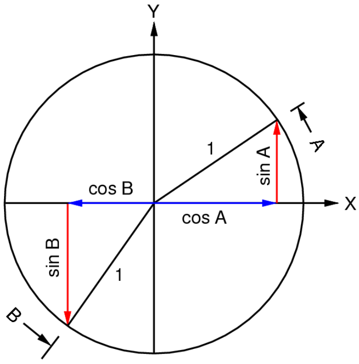
Kar velja za desetiški logaritem in desetiško eksponentno funkcijo glede povezanosti z "naravnim" logaritmom in "naravno" eksponentno funkcijo, velja seveda tudi za logaritme in eksponentne funkcije s poljubno (pozitivno) osnovo.

15.6 Kotne funkcije

Pri klancu je razmerje med njegovo višino h in diagonalo d enolično odvisno od nagibnega kota. Drugače rečeno: to razmerje je funkcija kota. Razmerje smo svoj čas krstili za sinus (8.7) in tako ga bomo poimenovali tudi kot funkcijo. Podobno smo definirali še razmerji kosinus in tangens in tudi na ti dve razmerji zdaj pogledamo kot na funkciji kota. Vse skupaj bomo poimenovali *kotne funkcije*.

Enotni krog

Kotne funkcije smo definirali le za klance, ki imajo dvižne kote med 0 in 90° oziroma med 0 in π/2. Vendar nam nič ne brani, da definicije razširimo na še večje kote. Vizirni kazalec na astrolabu z radijem r – spremenljiv klanec – pač zasučemo za poljubno velik kot φ. Pri zasuku se kazalec dotakne oboda v neki točki. Projekcije te točke na vodoravno in navpično os bomo izkoristili za razširjeno definicijo kotnih funkcij.



Slika 15.3 Enotni krog. Krog z radijem 1 služi za razširjeno definicijo kotnih funkcij za poljubni kot. Prikazani sta funkciji sinus in kosinus za dva kota. Prvi kot je z intervala $[0, \pi/2]$ in drugi z intervala $[\pi, 3\pi/2]$. Na prvem intervalu sta obe funkciji pozitivni in na drugem negativni.

Kotne funkcije

Višina vizirne točke nad ali pod vodoravno osjo astrolaba je daljica y; če je usmerjena navzgor, jo proglasimo za pozitivno, če navzdol, za negativno. Podobno je z razdaljo x točke od navpične osi astrolaba: če je usmerjena "naprej", naj bo pozitivna, sicer negativna. Dolžini y in x poimenujemo (predznačeni) koordinati opazovane obodne točke ter definiramo:

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \sin\varphi \\ \frac{x}{r} &= \cos\varphi \\ \frac{y}{x} &= \tan\varphi . \end{aligned} \tag{15.13}$$

S tem so kotne funkcije definirane za poljuben kot med 0 in 2π. Ta kot štejemo od vodoravne osi proti navpični, torej v nasprotni smeri urinega kazalca. Definicijo uveljavimo tudi za še večje kote (ko naredi kazalec več kot en obrat) in za negativne kote – tiste, ki jih merimo v nasprotni smeri, torej v smeri urinega kazalca. Dosedanje definicije so zajete kot poseben primer.

Veljavnost izrekov

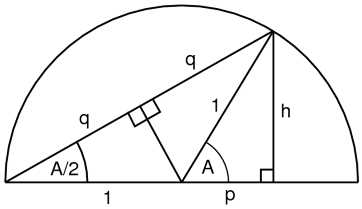
Kaj pa je z že spoznanimi osnovnimi izreki (8.8) ter s sinusnim (8.11) in kosinusnim (8.12) izrekom? Ali ostajajo v veljavi tudi za večje in celo za negativne kote? Z nekaj risbami in računi se prepričamo, da je odgovor pritrdilen. Pri tem smo deležni še nepričakovanega blagoslova. V sinusnem izreku namreč ni treba za topi kot A pisati $\sin(180° - A)$, ampak pišemo kar $\sin A$, torej enako kot za ostri kot. Definicija sinusa namreč poskrbi, da sta oba izraza identična. V kosinusnem izreku pa za topi kot ni treba več pisati $\cos(180° - A)$, ampak kar $-\cos A$, torej enako kot za ostri kot. Da sta oba izraza identična, poskrbi definicija kosinusa.

15.7 Kotne tabele

Za sedaj znamo določiti vrednosti kotnih funkcij pri poljubnem kotu zgolj z merjenjem njegovih projekcij. Le za nekatere kote, recimo 30°, jih znamo tudi izračunati. Ali ne bi bilo lepo, če bi jih znali izračunati za vsak kot med 0 in 90°? Očitno bi bilo to mogoče, če bi znali iz kotnih funkcij danega kota izračunati kotne funkcije polovičnega kota; in pa iz kotnih funkcij dveh danih kotov izračunati kotne funkcije za vsoto in razliko teh kotov.

Polovični kot

Ob omembi polovičnega kota se spomnimo naslednjega dejstva iz [8.4]: enakokraki kot nad tetivo kroga, z vrhom v njegovem središču, je točno dvakrat večji od enakokrakega kota nad isto tetivo, vendar z vrhom na obodu. To izkoristimo za izračun ustreznih kotnih funkcij.



Slika 15.4 Shema za izrek o sinusu in kosinusu polovičnega kota.

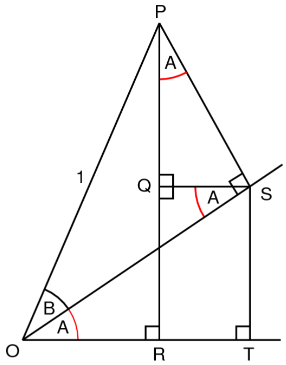
Slika pove: $\cos A = p$; $\cos A/2 = q$; in $\cos A/2 = (1+p)/2q$. Pa še tole: $\sin A = h$ in $\sin A/2 = h/2q$. Iz prve enačbe izrazimo p, iz druge q in oba vstavimo v tretjo enačbo. Nato pa q iz druge enačbe in h iz četrte vstavimo še v peto enačbo. Preimenujemo $A/2$ in A v A in $2A$ ter dobimo:

$$(\cos A)^2 = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2A) \qquad (15.14)$$
$$\sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A\,.$$

To sta izreka o sinusu in kosinusu polovičnega kota. Seveda sta hkrati tudi izreka o sinusu in kosinusu dvakratnega kota.

Vsota kotov

Določitev kotnih funkcij za vsoto kotov zahteva, da bika zgrabimo naravnost za roge: brez kakršnegakoli izogibanja moramo narisati ustrezajočo sliko in iz nje razbrati, kar iščemo.



Slika 15.5 Shema za izrek o sinusu in kosinusu vsote kotov.

Računamo takole: $\sin(A+B) = \mathrm{PR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{ST} = \mathrm{PS}\cos A + \mathrm{OS}\sin A = \sin B \cos A + \cos B \sin A$. In pa takole: $\cos(A+B) = \mathrm{OR} = \mathrm{OT} - \mathrm{RT} = \mathrm{OT} - \mathrm{QS} = \mathrm{OS}\cos A - \mathrm{PS}\sin A = \cos B \cos A - \sin B \sin A$. Torej:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \qquad (15.15)$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B\,.$$

To sta izreka o sinusu in kosinusu vsote dveh kotov. Kot poseben primer $A=B$ vsebujeta tudi oba izreka o dvojnem kotu.

Razlika kotov

Vse štiri izreke smo izpeljali za kote, manjše od 90°. Z nekaj računi pa se prepričamo, da veljajo za poljubne, tudi za negativne kote. Zato s substitucijo $B \to -B$ zlahka zapišemo izrek o sinusu in kosinusu razlike. Upoštevati moramo le to, da je sinus liha in kosinus soda funkcija: $\sin(-B) = -\sin B$ in $\cos(-B) = \cos B$. Izkaže se, da je treba na desni strani izrekov zgolj zamenjati znak "+" v "−" in obratno.

S pridelanimi izreki izračunamo tabelo sinusov (in drugih kotnih funkcij) s korakom okrog 1°. Bolj drobne korake določimo, če je treba, z interpolacijo.

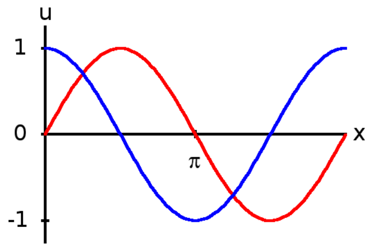
Goste kotne tabele so – tako kot logaritemske – debele in neudobne za prenašanje. Kdo pa nam brani, da jih (z omejeno natančnostjo) ne narišemo na drsno računalo kot eno ali več dodatnih skal? Tako uporabnost računala še povečamo.

15.8 Grafi kotnih funkcij

Sinus in kosinus

Graf funkcije $u = \sin x$ – vseeno je, s kakšnimi simboli označimo spremenljivke – je slika morskega vala z višino vrhov +1 in dolin −1. Val seka abscisno os pri 0 od spodaj navzgor in nato v zaporednih intervalih po π. Med temi ničelnimi točkami ležijo vrhovi in doline. Funkcija je *periodična*: $u(x) = u(x+2\pi)$ s *periodo* 2π in liha.

Graf funkcije $u = \cos x$ je enak kot za sinus, vendar premaknjen v levo za π/2, torej z vrhom vala pri 0. Funkcija je periodična in soda.



Slika 15.6 Graf sinusne funkcije $u = \sin x$ (rdeča črta) in kosinusne funkcije $u = \cos x$ (modra črta). Prikazana je le osnovna perioda vsake funkcije. Ta perioda se ponavlja v levo in v desno brez konca.

Splošna sinusoida

Obe funkciji – sinus in kosinus – zajamemo v splošno obliko, upoštevajoč sinus vsote (15.15):

$$u = A\sin(kx+\delta) = a\sin kx + b\cos kx \tag{15.16}$$
$$a = A\cos\delta$$
$$b = A\sin\delta\,.$$

Rečemo, da je to *sinusoida*. Vrhove in doline ima povečane za faktor A, razdalje med ničlami skrajšane za faktor k in je zamaknjena v levo ali desno za δ.

Graf funkcije tangens narišemo z grafičnim deljenjem funkcij sinus in kosinus: kjer je sinus enak 0, je tangens enak 0, in kjer je kosinus enak 0, je tangens enak $\pm\infty$; rečemo, da je tam pol, skozi katerega poteka navpična asimptota. Med dvema poloma tangens narašča.

15.9 Obratne kotne funkcije

Obratne funkcije h kotnim funkcijam poimenujemo arkus sinus, arkus kosinus in arkus tangens:

$$
\begin{aligned}
&\sin x = u \Longleftrightarrow x = \operatorname{asin} u \\
&\cos x = u \Longleftrightarrow x = \operatorname{acos} u \\
&\tan x = u \Longleftrightarrow x = \operatorname{atan} u\,.
\end{aligned}
\tag{15.17}
$$

Večličnost

Ker so kotne funkcije periodične, so njihove obratne funkcije *večlične*, to je, izvornega števila ne preslikajo v eno samo ciljno število, marveč v več, celo v neskončno mnogo. Zato obračamo le primerno dolge izvorne intervale: sinus predstavimo z naraščajočo vejo med $-\pi/2$ in $+\pi/2$, kosinus s padajočo vejo med 0 in π in tangens z naraščajočo vejo med $-\pi/2$ in $+\pi/2$. Grafi obratnih funkcij so taki kot grafi izvornih vej, gledani "od strani".

S tem zaenkrat zaključujemo iskanje transcendentnih funkcij. Brez dvoma jih bomo kasneje pri raziskovanju narave odkrili oziroma definirali še kaj. □

16 Diferenciali

Odvod – Diferencial – Odvodi osnovnih funkcij – Odvod obratne funkcije – Odvod sestavljene funkcije – Razvoj v potenčno vrsto – Razvoj osnovnih funkcij – Maksimum in minimum

16.1 Odvod

Pri risanju grafov smo večkrat omenili, da so ti bolj ali manj strmi. Kaj to pomeni kvalitativno, je znano vsakomur že iz otroških let. Morda pa lahko strmino grafa opišemo kvantitativno, to je s številom?

Strmina premice

Sprehodimo se v mislih po poševni premici skozi izhodišče koordinatnega sistema, torej po grafu funkcije $u = ax$. Ko pridemo nad koordinato x, se znajdemo na višini $u(x) = ax$. Če se iz te točke premaknemo naprej nad koordinato $x + h$, dosežemo višino $u(x + h) = a(x + h)$. Opravljeni premik je bolj ali manj "strm". Kvantificiramo ga s količnikom $[u(x + h) - u(x)]/h = a$, ki opisuje *strmino* premice pri koordinati x. Količnik je lahko večji ali manjši, pozitiven ali negativen, odvisno pač od tega, kakšna je premica. Pri tem je vseeno, za kakšen korak h gremo naprej: količnik je zmeraj enak. Prav tako je vseeno, nad katero koordinato x smo: povsod je količnik enak. Premica je povsod enako strma. Zato je tudi premica.

Strmina parabole

Zdaj pa se sprehodimo po kvadratni paraboli s temenom v koordinatnem izhodišču, torej po grafu funkcije $u = ax^2$. Ko se iz koordinate x premaknemo nad koordinato $x + h$, se višina spremeni iz $u(x) = ax^2$ v $u(x + h) = a(x + h)^2$. Izračunani količnik $[u(x + h) - u(x)]/h = 2ax + ah$ pa je zdaj odvisen od tega, kolikšen je korak h. S tem strmina žal ni enolično določena. Kako si pomagati? Tako, da zmanjšamo korak h na toliko, da postane člen ah mnogo manjši od člena $2ax$ in ga zanemarimo. Tedaj je strmina enaka $2ax$. Očitno ni v vsaki točki enaka. To seveda kaže graf sam.

Odvod funkcije

Kar smo ugotovili o strmini linearne in kvadratne funkcije, posplošimo na vsakršno funkcijo $u(x)$. Najprej označimo izraz "strmina funkcije u" s simbolom u'. Ker je izraz "strmina" preveč vezan na prostorsko navpičnico, ga raje nadomestimo z bolj nevtralnim izrazom *odvod*. Kako močno se funkcija $u(x)$ okrog neke vrednosti x spreminja, potem povemo takole:

$$u' = \lim_{dx \to 0} \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} \,. \tag{16.1}$$

To je definicija odvoda funkcije in s tem začetek razvoja diferencialnega računa (LEIBNIZ, EULER). Dosedanjo oznako h smo nadomestili z boljšo oznako dx, ki naj pomeni spremembo koordinate x. Da pa moramo to spremembo v izračunanem kvocientu napraviti dovolj majhno, opozorimo z oznako $\lim \mathrm{d}x \to 0$.

Odvod funkcije v izbrani točki ni nič drugega kot smerni koeficient premice, ki se krivulje tam dotika, *tangente*. Kadar je funkcija podana grafično, ga približno določimo z risanjem. Kadar je podana z enačbo, pa ga izračunamo po zgledu za linearno in kvadratno funkcijo. Odvod funkcije je definiran v vsaki dovolj pohlevni točki – razen v polu, skoku ali kolenu – in je zato tudi sam funkcija. Lahko ga nadalje odvajamo. Tako dobimo drugi odvod u'' in še višje odvode. Drugi odvod opisuje, kako se spreminja strmina tangente, to je, kako je graf ukrivljen.

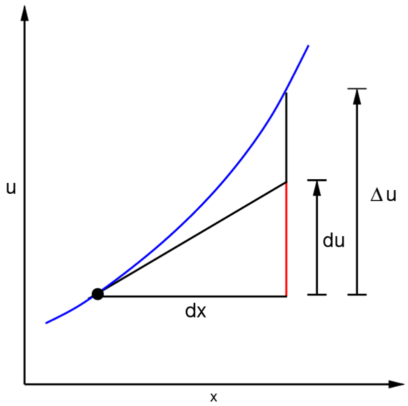
16.2 Diferencial

Prirast tangente in funkcije

Pri spremembi neodvisne spremenljivke za dx se funkcija spremeni za $\Delta u = u(x + \mathrm{d}x) - u(x)$. Ustrezni navpični prirastek na tangenti poimenujemo *diferencial* du funkcije in znaša

$$\mathrm{d}u = u' \cdot \mathrm{d}x\,. \tag{16.2}$$

Zaradi poenotenega izražanja bomo prirastek dx poimenovali diferencial argumenta.



Slika 16.1 Odvod in diferencial funkcije. Odvod v izbrani točki je smerni koeficient tangente v tej točki. Diferencial funkcije je navpični prirastek te tangente.

Diferencialni količnik

Vpeljava diferenciala funkcije omogoča, da izrazimo odvod funkcije kot količnik

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'\,. \tag{16.3}$$

To je pravi količnik dveh poljubno velikih diferencialov. Pri dovolj majhnem dx je diferencial funkcije du praktično enak spremembi funkcije Δu. Tedaj v praksi med obojima ne delamo razlike in obravnavamo du kot spremembo funkcije. Tudi drugi odvod in višje odvode lahko zapišemo z diferenciali in sicer takole:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = u''\,. \tag{16.4}$$

16.3 Odvodi osnovnih funkcij

Izračunajmo odvode osnovnih funkcij, ki jih že poznamo! Odvode bomo računali po definiciji, to je iz spremembe funkcije pri majhnem povečanju argumenta.

Konstanta

Najpreprostejša funkcija, če ji sploh lahko tako rečemo, je konstanta. Njen graf je ravna črta brez nagiba. Njen odvod je torej nič:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, c = 0\,. \tag{16.5}$$

Naravna potenca

Naravno potenco povečanega argumenta $(x+h)^n$ razvijemo po binomskem pravilu v polinom (15.3), odštejemo začetno vrednost x^n, delimo s h, zanemarimo vse člene, ki vsebujejo h, in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n = n x^{n-1}\,. \tag{16.6}$$

Skalarna potenca

Skalarno potenco povečanega argumenta $(x+h)^s$ preoblikujemo v $x^s(1+h/x)^s$, jo razvijemo v binomsko vrsto (15.4) in po že opisanem postopku dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^s = s x^{s-1}\,. \tag{16.7}$$

Eksponentna funkcija

Eksponentno funkcijo povečanega argumenta $\mathrm{e}^{(x+h)}$ zapišemo kot produkt $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^h$ ter nato e^h izrazimo z eksponentno vrsto (15.7). Dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,. \tag{16.8}$$

Zanimivo je, da je odvod funkcije enak funkciji sami. Eksponentna funkcija se pri odvajanju ne spremeni.

Kotne funkcije

Funkcijo sinus povečanega argumenta $\sin(x+h)$ razcepimo po izreku za sinus vsote dveh kotov (15.15). Za majhen h potem aproksimiramo, sklicujoč se na grafe kotnih funkcij, $\cos h \approx 1$ in $\sin h \approx h$. Podobno obdelamo funkcijo kosinus in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \sin x &= \cos x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \cos x &= -\sin x\,. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Dvakratno odvajanje prevede sinus nazaj v sinus, vendar z negativnim predznakom. Podobno velja za kosinus.

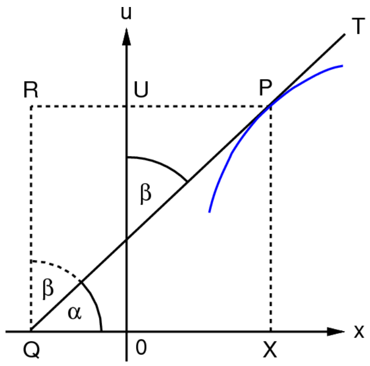
16.4 Odvod obratne funkcije

Dva odvoda

Vsako dovolj pohlevno funkcijo $u(x)$ je možno zapisati kot obratno funkcijo $x(u)$, recimo $u = x^2$ kot $x = u^{1/2}$. Funkcija in njena obratna funkcija sta, kot vemo, po definiciji povezani takole: če na argument delujemo s funkcijo in nato na dobljeni rezultat še z obratno funkcijo, dobimo začetni argument. Morda sta tudi odvoda $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ med seboj nekako povezana? Ker velja za omenjeno funkcijo $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = 1/2u^{1/2} = 1/2x$, domnevamo, da velja splošno

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 \,. \tag{16.10}$$

Odvod obratne funkcije je recipročna vrednost odvoda prvotne funkcije. Domnevo dokažemo takole. Tangenta na krivuljo $u(x)$ tvori z osjo x kot α in z osjo u kot β, torej $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = \tan\alpha$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = \tan\beta$. Velja: $\tan\alpha = \mathrm{PX}/\mathrm{XQ}$, $\tan\beta = \mathrm{PR}/\mathrm{RQ} = \mathrm{XQ}/\mathrm{PX}$, zato $\tan\alpha\tan\beta = 1$.



Slika 16.2 Shema za izrek o odvodu obratne funkcije. Tangenta T oklepa z absciso kot α in z ordinato kot β. Tangens prvega kota je odvod funkcije in tangens drugega kota je odvod obratne funkcije.

Logaritemska funkcija

Izrek o odvodu obratne funkcije omogoča, da izračunamo odvod logaritemske funkcije $u = \ln x$. Ta je namreč obratna funkcija k $\mathrm{e}^u = x$, torej $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 1/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}u) = 1/\mathrm{e}^u = 1/x$, to je:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} \,. \tag{16.11}$$

Obratne kotne funkcije

Podobno izračunamo tudi odvode obratnih kotnih funkcij:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{asin} x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \tag{16.12}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{acos} x = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \,.$$

16.5 Odvod sestavljene funkcije

Linearna in kvadratna funkcija ter polinomi nasploh so sestavljeni iz potenc različnih stopenj, pomnoženih s skalarji, in seštetih. Še bolj zamotane funkcije dobimo kot količnike polinomov. Pojavi se vprašanje, kako odvajati takšne in podobne sestavljene funkcije.

Vsota, produkt in kvocient

Naj bo $A = cu(x)$. Ko naraste $x \to x + \mathrm{d}x$, naraste $u \to u + \mathrm{d}u$ in $A \to A + \mathrm{d}A$. Velja $A + \mathrm{d}A = c(u + \mathrm{d}u) = cu + c\mathrm{d}u$. Odštejemo enačbo $A = cu$, dobimo $\mathrm{d}A = c\mathrm{d}u$, delimo z $\mathrm{d}x$ in doženemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \,. \tag{16.13}$$

Vsoto funkcij $A = u(x) + v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u) + (v + \mathrm{d}v)$, odštejemo $A = u + v$, dobimo $\mathrm{d}A = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$, delimo z $\mathrm{d}x$ in ugotovimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u \pm v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{16.14}$$

Produkt funkcij $A = u(x)v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u)(v + \mathrm{d}v)$, križem pomnožimo, zanemarimo produkt dveh diferencialov, odštejemo $A = uv$, delimo z $\mathrm{d}x$ in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{16.15}$$

Kvocient funkcij $A = u(x)/v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u)/(v + \mathrm{d}v)$. Števec in imenovalec pomnožimo z $(v - \mathrm{d}v)$, križem pomnožimo, zanemarimo produkte dveh diferencialov, odštejemo $A = u/v$ ter najdemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\mathrm{d}u/\mathrm{d}x \cdot v - u \cdot \mathrm{d}v/dx}{v^2}\,. \tag{16.16}$$

Posredna funkcija

Na poseben način sestavljeno funkcijo $u(x)$ dobimo, če njen argument x nadomestimo z drugo funkcijo $v(x)$ ter pridelamo $u(v(x))$. Dobra primera sta $\exp(kx)$ ali $\sin(kx + b)$. Kako odvajati takšno funkcijo? Vemo, da diferencialu $\mathrm{d}x$ ustreza diferencial $\mathrm{d}v$, in njemu diferencial $\mathrm{d}u$. Velja $\mathrm{d}u = u'(v) \cdot \mathrm{d}v$ in $\mathrm{d}v = v'(x) \cdot \mathrm{d}x$. Vstavitev $\mathrm{d}v$ iz druge enačbe v prvo enačbo pove:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{16.17}$$

To je verižno pravilo in z njim zmoremo odvajati tudi zelo zapletene funkcije.

16.6 Razvoj v potenčno vrsto

Funkcijo $1/(1 - x)$ znamo izraziti kot geometrijsko vrsto (15.1). Potenco binoma $(1 + x)^s$ smo zapisali kot binomsko vrsto (15.4). Obe omenjeni vrsti sta potenčni. Kaj ne bi bilo čudovito, če bi lahko katerokoli funkcijo zapisali s potenčno vrsto? Predpostavimo torej, da velja $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ Koeficienti a_i so seveda odvisni od tega, kakšna, konkretno, je funkcija $u(x)$. Drugačna funkcija, drugačni koeficienti.

Koeficienti členov

Vemo tole. Pri $x = 0$ mora veljati $u(0) = a_0$. S tem je koeficient a_0 že določen. Nato odvajamo funkcijo in dobimo $u'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots$ Pri $x = 0$ mora veljati $u'(0) = a_1$ in s tem je določen koeficient a_1. Tako nadaljujemo z zaporednim odvajanjem in določimo vse koeficiente:

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1!}x + \frac{u''(0)}{2!}x^2 + \ldots \tag{16.18}$$

Koeficienti so odvisni le od vrednosti funkcije in njenih odvodov v točki $x = 0$. Zato rečemo, da smo funkcijo *razvili* okrog te točke. Seveda jo lahko razvijemo tudi okrog kake druge točke $x = a$; potem dobimo

$$u(a+h) = u(a) + \frac{u'(a)}{1!}\,h + \frac{u''(a)}{2!}\,h^2 + \ldots \tag{16.19}$$

Konvergenca vrste

To je *potenčni razvoj* funkcije (TAYLOR). Potenčna vrsta konvergira, če se njeni zaporedni členi dovolj hitro manjšajo. Kriterij za konvergenco (pri izbranem argumentu x) je, kot vemo, razmerje dveh zaporednih členov; limita tega razmerja mora biti absolutno manjša od 1 (15.6); Če vrsta konvergira za nek argument, konvergira tudi za vsak absolutno manjši argument. Za vsako funkcijo posebej moramo določiti, kakšen je največji argumant, za katerega njena vrsta še konvergira.

16.7 Razvoj osnovnih funkcij

Razvijmo v potenčne vrste nabor posebnih funkcij, ki jih že poznamo! To naredimo tako, da izračunamo zaporedne odvode teh funkcij in nato določimo, za kakšne vrednosti argumentov konvergirajo.

Eksponentna funkcija

Razvoj eksponentne funkcije že poznamo (15.7), saj smo jo pravzaprav definirali s potenčno vrsto. Vrsta konvergira za vsako vrednost argumenta. Za zabavo pa lahko postopek obrnemo: potenčno vrsto poustvarimo z zaporednim odvajanjem eksponentne funkcije.

Logaritemska funkcija

Prvi odvod logaritemske funkcije znaša $1/x$, kar je negativna naravna potenca, in vsi zaporedni odvodi te potence so spet potence. Razvijamo okrog točke $x = 1$, kjer ima logaritem vrednost nič, in dobimo:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{16.20}$$

Vrsta konvergira za $|x| < 1$. Kako pa naj izračunamo logaritem za argument, ki je večji od 1? Poimenujmo ta argument y in ga zapišimo v obliki $y = (1+x)/(1-x)$. S tem je definiran $x = (y-1)/(y+1)$, ki je zmeraj manjši od 1. Zato lahko razvijemo $\ln(1+x)$ in $\ln(1-x)$ v dve vrsti, drugo odštejemo od prve in dobimo $\ln y$ kot

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots) \tag{16.21}$$

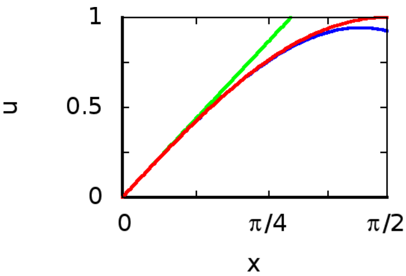
Na ta način zlahka izračunamo kakršenkoli logaritem in omilimo dosedanjo potrebo po logaritemskih tablicah.

Kotne funkcije

Zaporedni odvodi funkcij sinus in kosinus so, izmenično, spet funkcije sinus in kosinus. Razvijamo okrog točke nič, kjer ima sinus vrednost nič in kosinus vrednost ena, pa dobimo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad (16.22)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Vrsti sta konvergentni za poljubno velik argument. Z njima zlahka izračunamo kakršnokoli kotno funkcijo in tako omilimo dosedanjo potrebo po trigonometričnih tablicah.



Slika 16.3 Razvoj funkcije sinus v potenčno vrsto okrog izhodišča. Prikazani so grafi za prvi člen (zelen), za prvi in drugi člen (moder) in za vse člene (rdeč).

16.8 Maksimum in minimum

Odvod v ekstremu

V točki, kjer ima funkcija lokalni *maksimum* ali *minimum*, torej *ekstrem*, je tangenta vodoravna: odvod je enak nič. To nas navede na misel, kako za preiskovano funkcijo ugotoviti, ali in kje ima omenjene ekstreme. Funkcijo odvajamo, njen odvod izenačimo z nič in rešimo dobljeno enačbo. Najdeni koreni povedo, kje so lahko ekstremi.

Vrsta ekstrema

Ali je preučevani morebitni ekstrem v točki a maksimum ali minimum? Funkcijo razvijemo okrog te točke v vrsto do kvadratnega člena, pri čemer postavimo prvi odvod na nič. Dobimo izraz $u(a+h) = u(a) + 1/2 \cdot u(a)''h^2$. Faktor h^2 je vedno pozitiven. Če je torej drugi odvod $u''(a)$ pozitiven, se bo drugi člen vedno dodal k prvemu, zato imamo minimum. Če je drugi odvod negativen, imamo maksimum. Če pa je drugi odvod enak nič, imamo prevoj:

$$u = \max \Longleftrightarrow u' = 0 \text{ in } u'' < 0 \qquad (16.23)$$
$$u = \min \Longleftrightarrow u' = 0 \text{ in } u'' > 0 \,.$$

Za parabolo $u = ax^2 + bx + c$, na primer, izračunamo $u' = 2ax + b = 0$, torej je ekstrem pri $x = -b/2a$, kakor smo svoj čas že ugotovili [14.6]. Drugi odvod $u'' = 2a$ je v ekstremalni točki pozitiven ali negativen, odvisno od tega, kakšen je koeficient a. □

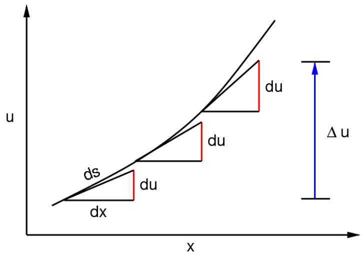
17 Integrali

Integral – Integrali osnovnih funkcij – Pravila integriranja – Integriranje vrst – Uporaba v geometriji

17.1 Integral

Diferencialni trikotniki

Tangenta na krivuljo v izbrani točki $u(x)$ določa lokalni *diferencialni trikotnik*, sestavljen iz poljubno dolgega kosa te tangente ds ter iz pripadajočih diferencialov dx in du. Tudi v točki $u(x + \mathrm{d}x)$ lahko narišemo lokalni diferencialni trikotnik in tako naprej. Na ta način narišemo vzdolž krivulje zaporedje trikotnikov, ki se tiščijo drug drugega.



Slika 17.1 Niz diferencialnih trikotnikov. Vsota diferencialov funkcije du je enaka spremembi funkcije Δu, če so le diferenciali dovolj majhni.

Pri dovolj majhnih dx so diferenciali du praktično enaki lokalnim spremembam funkcije Δu, vsota vseh diferencialov pa je enaka celotni spremembi funkcije, ki jo tudi označimo kot Δu:

$$\Delta u = \lim_{\mathrm{d}u \to 0} \sum \mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u \,. \tag{17.1}$$

To je definicija *integrala* funkcije in s tem začetek razvoja integralnega računa (LEIBNIZ, EULER). Da moramo seštevati dovolj majhne diferenciale, opozorimo z oznako "$\lim \mathrm{d}u \to 0 \sum$" oziroma, krajše, z znakom $\int$. V praksi obravnavamo du kot majhno spremembo funkcije in $\int \mathrm{d}u$ kot vsoto njenih majhnih sprememb.

Računanje integrala

Ker lahko vsakega izmed zaporednih diferencialov izrazimo z lokalnim odvodom, velja:

$$\int \mathrm{d}u = \int_a^b u' \,\mathrm{d}x = u(b) - u(a) \,. \tag{17.2}$$

Integral funkcije $u'(x)$ med krajiščnima točkama $x = a$ in $x = b$ torej izračunamo tako, da – kakor vemo in znamo – poiščemo *primitivno funkcijo* $u(x)$, katere odvod je enak integrirani funkciji, ter izračunamo njeno razliko med krajiščnima točkama.

Določeni in nedoločeni integral

Integral med dvema zakoličenima mejama je *določen*: je neko število. Lahko si pa mislimo zgornjo mejo spremenljivo; tedaj postane integral funkcija te meje. Funkcija je odvisna še od postavitve spodnje meje: če to prestavimo, se spremeni za aditivno konstanto. Rečemo, da je tak integral brez specificiranih mej *nedoločen* in pišemo:

$$\int u' \,\mathrm{d}x = u(x) + C\,. \tag{17.3}$$

Diferenciranje je določanje diferencialov vzdolž znanega grafa. Integriranje, to pa je določanje celotnega grafa iz znanega zaporedja diferencialov. Integriranje je torej obratna operacija k diferenciranju.

17.2 Integrali osnovnih funkcij

Integral izračunamo tako, da podintegralsko funkcijo predelamo v obliko, ko v njej prepoznamo odvod znane funkcije. Na primer: (nedoločeni) integral x^2 je enak $x^3/3 + C$, ker je odvod druge funkcije enak prvi funkciji. Aditivno konstanto ponavadi kar izpuščamo.

Nabor integralov

Iz že poznanih odvodov osnovnih funkcij (16.5–9) takoj sledijo naslednji osnovni integrali (aditivna konstanta je izpuščena):

$$\begin{aligned}
&\int c\,\mathrm{d}x = cx \\
&\int x^s\,\mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1}\,,\, s \neq -1 \\
&\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x \\
&\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \\
&\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \\
&\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\,.
\end{aligned} \tag{17.4}$$

Da so izračunani nedoločeni integrali, torej primitivne funkcije, res pravilni, se najlažje prepričamo tako, da jih odvajamo, pri čemer moramo dobiti podintegralske funkcije.

17.3 Pravila integriranja

Meje

Integriramo lahko od prve meje k drugi ali obratno. Prav tako lahko integriramo od prve meje do neke vmesne meje in nato od te vmesne meje do druge meje. Skoraj samoumevno velja:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u\,\mathrm{d}x = -\int_b^a u\,\mathrm{d}x \\
&\int_a^b u\,\mathrm{d}x + \int_b^c u\,\mathrm{d}x = \int_a^c u\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned} \tag{17.5}$$

Sestavljene funkcije

Ker je integriranje nasprotna operacija od diferenciranja oziroma odvajanja, so z znanimi pravili za odvajanje sestavljenih funkcij (16.13–17) določena tudi ustrezna pravila za integriranje.

Pravilo za odvod s konstanto pomnožene funkcije integriramo na obeh straneh: $\int (cu)'\,\mathrm{d}x = \int cu'\,\mathrm{d}x$. Integral na levi strani je, po definiciji, enak cu. Da bo tudi integral na desni strani tak, mora biti enak $c\int u'\,\mathrm{d}x$. Odvod poljubne funkcije je pravzaprav tudi poljubna funkcija, zato ni škode, če v končnem rezultatu namesto u' zapišemo kar u (s tem smo poljubno funkcijo zgolj preimenovali) in dobimo:

$$\int cu\,\mathrm{d}x = c\int u\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.6}$$

Pravilo za odvod vsote integriramo na obeh straneh: $\int (u+v)'\,\mathrm{d}x = \int (u'+v')\,\mathrm{d}x$. Integral na levi je, po definiciji, enak $u+v$. Da bo tak tudi integral na desni, mora biti enak $\int u'\,\mathrm{d}x + \int v'\,\mathrm{d}x$, to je, veljati mora

$$\int (u\pm v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x \pm \int v\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.7}$$

Integriranje po delih

Pravilo za odvod produkta integriramo na obeh straneh, pri čemer uporabimo že znano pravilo o integralu vsote: $\int (uv)'\,\mathrm{d}x = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$, kar takoj vodi do izreka

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.8}$$

Če je torej podintegralska funkcija produkt dveh funkcij, od katerih znamo integrirati eno, jo integriramo samostojno, nakar jo integriramo še enkrat, tokrat pomnoženo z odvodom druge funkcije. Pravimo, da *integriramo po delih*. Tako, na primer, izračunamo integral funkcije $x\cdot\sin x$ ali $x\cdot\mathrm{e}^x$, pri čemer integriramo kotno ali eksponentno funkcijo, linearno funkcijo pa odvajanje v naše zadovoljstvo zradira v konstanto.

Zamenjava spremenljivke

Integracija verižnega pravila za odvajanje posredne funkcije pove: $\int u'(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(v)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$. Upoštevamo $v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, spremenimo oznako u' v u in dobimo

$$\int u(x)\,\mathrm{d}x = \int u[v(x)]\,\mathrm{d}v\,. \tag{17.9}$$

S tem pravilom o *zamenjavi spremenljivke* močno razširimo nabor funkcij, ki jih zmoremo integrirati. Dober zgled je integral $\int \sin(kx)\,\mathrm{d}x$. Takoj vidimo: če bi za diferencial imeli $\mathrm{d}(kx)$, bi imeli opravka z obliko $\int \sin t\,\mathrm{d}t$, ki jo znamo integrirati. Pa vstavimo faktor k pod diferencial! Ker $\mathrm{d}(kx) = k\,\mathrm{d}x$, smo s preoblikovanjem diferenciala posledično pomnožili podintegralski izraz s k, zato ga moramo s k še deliti, pa dobimo $(1/k)\int \sin(kx)\,\mathrm{d}(kx)$. Opisanemu postopku za zamenjavo spremenljivke rečemo "spravljanje pod diferencial".

17.4 Integriranje vrst

Integrabilnost

Če nihče ne bi vedel, da je odvod $\ln x$ enak $1/x$, potem nikakor ne bi vedeli, kako integrirati $\int \mathrm{d}x/x$. To nas opominja na naslednje: nobene funkcije ne moremo integrirati, če je poprej nismo pridelali z diferenciranjem česa drugega. Tako, na primer, še nikomur do sedaj ni uspelo – z znanimi funkcijami – integrirati $\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Kaj storiti v takem primeru? Integral – ki je funkcija zgornje meje – lahko uporabimo kot definicijo te funkcije in jo poimenujemo z novim imenom, recimo $\mathrm{erf}(x)$. Seveda je ta definicija zgolj formalna vse dotlej, dokler ne najdemo poti, kako za vsak x zares izračunati pripadajoči $\mathrm{erf}(x)$.

Integriranje vrste

Pri iskanju poti, kako integrirati "neintegrabilno" funkcijo, se spomnimo, da jo pravzaprav lahko razvijemo v potenčno vrsto (16.18) in členoma integriramo. Integriranje potenc je namreč preprosto. Integrirana vrsta je tudi potenčna in konvergira, v kar se prepričamo s konvergenčnim testom. Tako funkcijo, ki smo jo sprva definirali preko integrala, efektivno redefiniramo preko ustrezne vrste.

Številska vrsta za π

Seveda lahko z razvojem v potenčne vrste integriramo tudi "integrabilne" funkcije. Na zanimiv primer naletimo, ko hočemo integrirati funkcijo $1/(1+x^2)$, ki je odvod funkcije arkus tangens, $\mathrm{atan}(x)$. (To ugotovimo, ko izračunamo odvod funkcije tangens kot kvocienta funkcij sinus in kosinus, nakar izračunamo še odvod k tangensu inverzne funkcije.) Ko jo razvijemo v binomsko vrsto in členoma integriramo, dobimo vrsto za $\mathrm{atan}(x)$, ki konvergira za $|x| \le 1$. Vemo, da $\tan(\pi/4) = 1$, zato $\pi/4 = \mathrm{atan}(1)$ in vrsta pove:

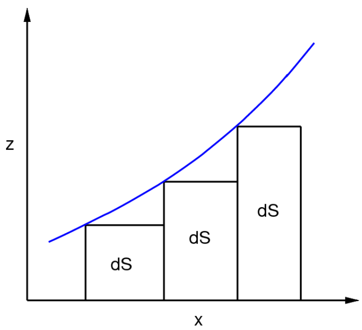
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (17.10)$$

Dobili smo način, kako izračunati število π na toliko decimalnih mest, kot želimo. Konvergenca je sicer počasna, vendar zanesljiva.

17.5 Uporaba v geometriji

Enačba $u = f(x)$ opisuje odvisnost dveh splošnih spremenljivk. Naj bosta do nadaljnjega to dve konkretni spremenljivki in sicer dve pravokotni ravninski koordinati: vodoravna x in navpična z. Enačba $z = f(x)$ tedaj opisuje pravo, geometrijsko krivuljo v navpični ravnini, recimo parabolo $z = x^2$. Kaj lahko v tem primeru povemo o integriranju?

Ploščina pod krivuljo



Slika 17.2 Ploščina pod krivuljo. Seštevek diferencialov dS je enak ploščini pod krivuljo $z(x)$, če so le diferenciali dovolj majhni.

Nad vsakim diferencialom dx je "naložen" ozek trak, segajoč do krivulje. Tak trak, aproksimiran s pravokotnikom, ima ploščino $\mathrm{d}S = z\,\mathrm{d}x$, in vsota vseh tovrstnih ploščin je enaka celotni ploščini pod krivuljo. Velja

$$S = \int z\,\mathrm{d}x\,. \qquad (17.11)$$

Tako računamo ploščine krivočrtnih likov. Paziti moramo le na to, da je ploščina nad abscisno osjo pozitivna in pod to osjo negativna. Ploščina pod sinusno krivuljo med koordinatama 0 in 2π, na primer, je zato enaka nič.

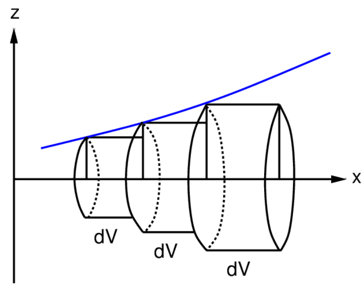
Trivialen primer je premica skozi izhodišče: $z = (h/a)x$. Integral za izračun ploščine ima rešitev $S = (h/a)x^2/2$. Če $x = a$, velja $S = ah/2$, kakor se za ploščino trikotnika tudi spodobi.

Prostornina vrtenine

Če pozitiven kos krivulje zavrtimo okrog abscisne osi, zarišemo rotacijsko telo, vrtenino. Okrog vsakega diferenciala dx je zdaj "razprostrt", kakor ražnjič na palici, prostorninski element vrtenine. Ta ražnjič, aproksimiran z valjem, ima prostornino $\mathrm{d}V = \pi z^2\,\mathrm{d}x$ in prostornina celotne vrtenine znaša

$$V = \pi \int z^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{17.12}$$

Tako določamo prostornino vrtenin.



Slika 17.3 Prostornina vrtenine. Seštevek diferencialov dV je enak prostornini vrtenine pod krivuljo $z(x)$, če so le diferenciali dovolj majhni.

Preprost zgled je stožec: to je premica $z = (r/h)x$, zavrtena okrog abscisne osi. Pri razdalji h je visoka r in dolga l. Integracija od 0 do h potrdi že znana rezultata $S = \pi r l$ in $V = \pi r^2 h/3$. □

18 Gibanje

Vodoravno drsenje – Prečkanje reke – Prosti pad – Zakoni padanja – Poševni met – Gibanje izstrelkov – Nihanje nihala – Kroženje nihala – Kroženje satelitov – Kroženje planetov

18.1 Vodoravno drsenje

Hitrost

Po gladko zaledenelem jezeru porinemo sani. Ko jih spustimo, drsijo naprej v ravni črti. Glede na to, kako močno smo jih potisnili, prepotujejo po ravnini v izbranem času manjšo ali večjo razdaljo, oziroma potrebujejo za prelet izbrane razdalje več ali manj časa. Rečemo, da imajo sani manjšo ali večjo *hitrost* v gibanja. Kvantitativno definiramo hitrost kot razmerje med prepotovano razdaljo s in za to potrebnim časom t:

$$v = \frac{s}{t} \,. \tag{18.1}$$

S tem je določena tudi njena enota, na primer m/s. Kakor smo hitrost definirali, tako jo tudi merimo: nekje ob poti označimo primeren dolžinski interval, recimo 5 m, in z uro štoparico izmerimo preletni čas preko njega; ali pa med drsenjem sprožimo štoparico za primeren časovni interval, recimo za 5 sekund, in označimo, kje vidimo sani na začetku in koncu tega intervala.

Kje na poti naj merimo in kako dolge dolžinske oziroma časovne intervale naj izberemo? Različni opazovalci, postavljeni vzdolž poti, izmerijo povsod enako hitrost. Rečemo, da se sani gibljejo *enakomerno*. Zato je vseeno, kje in kako merimo. Seveda mora biti ledena ploskev zelo gladka, sicer se hitrost sani vzdolž poti zmanjšuje.

Hitrost in pot

Obrnjena definicijska enačba za hitrost pove

$$s = vt \,. \tag{18.2}$$

Če torej poznamo hitrost sani, lahko izračunamo, kolikšno pot prepotujejo v določenem času. Pot je premosorazmerna s časom. Graf poti je premica, katere strmina je enaka hitrosti gibanja. Povedano ne velja le za sani na ledeni ploskvi, ampak za kakršnokoli telo, ki se giblje enakomerno, recimo za karavano kamel v puščavi ali za ladjo na morju. Ni potrebno, da je njuna pot ravna, ampak je lahko kriva. Človek hodi s hitrostjo 5 km/h in teče z največjo hitrostjo 10 m/s. Jadrnica na morju pa pluje tipično s hitrostjo 5 NM/h. Enoti NM/h rečemo tudi *vozel*, kt. Če bi lahko jadrnica plula okoli sveta po ekvatorju, bi s tako hitrostjo potrebovala pol leta. Zemlja navsezadnje le ni tako velika.

18.2 Prečkanje reke

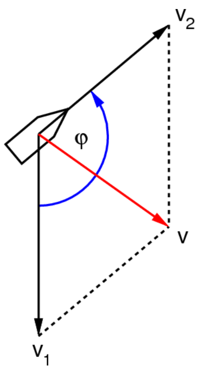
Vzdolžni premik

Čoln, ki ga s seboj nosi reka, prevozi v izbranem času t pot s_1 glede na breg. Hitrost čolna – in tudi reke – glede na breg je torej

$v_1 = s_1/t$. Če obenem še veslamo v smeri toka, v istem času prevozimo dodatno pot s_2 glede na reko, to je, glede na reko se gibljemo s hitrostjo $v_2 = s_2/t$. Skupna pot, ki jo čoln prevozi glede na breg, je $s = s_1 + s_2$, torej je hitrost čolna glede na breg enaka $v = v_1 + v_2$. Hitrosti se seštevata. Podobno je takrat, ko obrnemo čoln in veslamo proti reki; tedaj se hitrosti odštevata: $v = v_1 - v_2$. Odvisno od tega, katera hitrost je večja, se čoln giblje glede na breg navzgor ali navzdol. Če se dogovorimo, da bomo šteli hitrosti navzdol kot pozitivne in hitrosti navzgor kot negativne, pa lahko v obeh primerih rečemo, da hitrosti seštevamo, in zapišemo $v = v_1 + v_2$. Rezultat seštevanja dveh hitrosti bomo imenovali njuno rezultanto.

Prečni premik

Po reki se lahko peljemo tudi počez. Če veslamo pravokotno na reko, tok pa nas nosi navzdol, se dejansko gibljemo poševno navzdol. V času t opravimo vzdolžni premik s_1 in prečni premik s_2; po hipotenuznem izreku (8.4) se sestavita v rezultantni premik $s^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2$. To pomeni, da se gibljemo z rezultantno hitrostjo $v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2$. Če hočemo, da se čoln giblje pravokotno na tok, moramo zato veslati poševno proti njemu pod pravšnjim kotom. Kadar je smer veslanja odmaknjena od smeri toka za poljuben kot φ, pa je rezultanta premikov in s tem tudi hitrosti podana s paralelogramskim pravilom (9.7), torej $v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2v_1v_2 \cos\varphi$. To pravilo pokriva vse predhodne posebne primere: veslanje vzdolž toka, proti njemu in pravokotno nanj.



Slika 18.1 Gibanje čolna po reki. Hitrost reke glede na dno v_1 in hitrost čolna glede na reko v_2 se sestavita v skupno hitrost čolna glede na dno v po paralelogramskem pravilu.

Vektorji

Premik in hitrost (premik na časovno enoto) sta torej količini, ki imata poleg velikosti še smer. Nazorno si ju predstavljamo kot puščici. Seštevamo ju po paralelogramskem pravilu. V tem sta podobna silam, ki smo jih že spoznali. Rekli bomo, da so vse to usmerjene količine oziroma *vektorji*. Količine, ki niso usmerjene, recimo čas, dolžino, ploščino in prostornino, pa bomo imenovali *skalarje*.

18.3 Prosti pad

Trenutna hitrost

Kamen, ki ga spustimo s stolpa, pada po navpičnici, vendar je očitno, da njegova hitrost ni enakomerna. Čim dalj časa namreč pada, tem hitrejši je, kar nam pove silovitost njegovega udarca ob tla. Graf poti v odvisnosti od časa torej ni premica, marveč neka – še neznana – krivulja $s(t)$, katere strmina narašča s časom. Kako definirati hitrost v tem primeru? Kakršnakoli že je krivulja, v vsaki njeni točki obstaja tangenta in strmina te tangente se kar sama ponuja za posplošeno definicijo hitrosti kot odvoda poti po času:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,. \tag{18.3}$$

Trenutni pospešek

Pri prostem padu hitrost torej stalno narašča. Rečemo, da je gibanje *pospešeno*. Koliko pa se spremeni hitrost v časovni enoti? Tudi to povemo z odvodom

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,, \tag{18.4}$$

ki ga poimenujemo *pospešek*. Ustrezna enota zanj je, na primer, $\mathrm{m/s^2}$. Obe definiciji – za hitrost in za pospešek – smo sicer postavili na primeru prostega pada, vendar jih razširimo na vsakršno premo gibanje. Pri premem enakomernem drsenju, na primer, je hitrost konstantna in pospešek je enak nič. Pri drugačnem gibanju pa je hitrost lahko pozitivna ali negativna (odvisno od tega, v katero smer se telo giblje), pospešek pa prav tako (če telo pospešuje ali zavira).

Pospešek, hitrost in pot

Ko definicijo za hitrost obrnemo, pove $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$. Če torej poznamo hitrost ob določenem času, lahko izračunamo spremembo poti, ki jo telo opravi v kratkem času. S seštevanjem (z integralom) teh prirastkov pa dobimo dolžino poti v odvisnosti od časa; seveda moramo za vsak trenutek potovanja poznati takratno hitrost:

$$s = \int v\,\mathrm{d}t\,. \tag{18.5}$$

Podobno velja za pospešek. Če je poznan kot funkcija časa, je s tem določena tudi hitrost gibanja:

$$v = \int a\,\mathrm{d}t\,. \tag{18.6}$$

18.4 Zakoni padanja

Težni pospešek

Predpostavimo, da je pri prostem padu pospešek izbranega kamna konstanten, to je, da je gibanje *enakomerno pospešeno* s *težnim pospeškom g*. Iz definicij pospeška in hitrosti potem z integriranjem in kombiniranjem sledi

$$\begin{aligned} v &= gt \\ s &= \frac{gt^2}{2} \\ v^2 &= 2gs\,. \end{aligned} \tag{18.7}$$

To so *zakoni padanja* (Galilei). Hitrost naj bi torej naraščala sorazmerno s časom, globina padca pa sorazmerno s kvadratom časa.

Toda – ali se te enačbe res ujemajo s stvarnostjo? Lahko katero preizkusimo? Za preverbo s poskusom je najbolj primerna druga enačba: s stolpa z različnih višin mečemo kamen in z uro štoparico merimo čase do padca na tla. Padec z višine 5 m traja 1 sekundo, z višine 20 m traja 2 sekundi in z višine 45 m približno 3 sekunde. Tako ugotovimo, da zapisana povezava med višino in časom res velja; padanje je torej res enakomerno pospešeno. Meritev da celo težni pospešek, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, vendar je le malo natančna, morda na 10 %. Kaže, da je v okviru te merske natančnosti pospešek povsod po Zemlji enak.

Slika 18.2 Replika klanca za spuščanje kroglic, ki ga je uporabljal G. Galilei. Tako se upočasni prosti pad. Kroglice spotoma cingljajo na zvončke. Če so ti postavljeni na primernih razdaljah, je cingljanje po posluhu enakomerno. (Museo Galileo, Firence)

Vsa telesa padajo enako

Ali je padanje kaj odvisno od teže izbranega kamna? Poskus s težko svinčeno in lahko leseno kroglo kaže, da vsa telesa padajo enako, vštric, če ne moti zračni upor. Ko opazovalec skoči z mostu v vodo z žogo v roki in jo med padom spusti, se sicer oba – opazovalec in žoga – gibata enakomerno pospešeno glede na most, žoga pa glede na opazovalca miruje. To tudi pomeni, da v prosto padajoči kabini kamni ne padajo (glede na stene kabine), marveč mirujejo.

Da vsa telesa res padajo enako, podkrepi tudi naslednji premislek. Recimo, da težje telo pada z večjim pospeškom kot lažje. Če dve telesi zvežemo, bi moralo počasnejše telo zavirati gibanje hitrejšega in skupek bi padal z nekim vmesnim pospeškom. Po drugi strani pa je sestavljeno telo težje od vsakega posebej in bi zato moralo padati z večjim pospeškom kot vsako posebej. Oba zaključka si nasprotujeta, zato morata telesi padati enako.

18.5 Poševni met

Koordinate lege

Kamen vržemo poševno navzgor. Vrženi kamen ne potuje v ravni črti, ampak opiše neko krivuljo: najprej se dviguje in nato pada. Gibanje popolnoma opišemo, če za vsak trenutek navedemo, kje je kamen, to je, kakšni sta njegova vodoravna oddaljenost $x(t)$ in višina $z(t)$. Rečemo, da sta to njegovi *koordinati lege*.

Komponente hitrosti

Ko je kamen v izbrani točki krivulje, se za kratek čas $\mathrm{d}t$ giblje vzdolž lokalne tangente in pri tem naredi kratek premik $\mathrm{d}s$. Hkrati se spremenita njegovi koordinati za $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}z$. Rečemo, da sta to *komponenti premika*. Definicijo hitrosti razširimo na vsako komponento posebej in dobimo

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad (18.8)$$
$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$
$$v^2 = {v_x}^2 + {v_z}^2 \,.$$

Rečemo, da je hitrost opisana z dvema *komponentama hitrosti* vzdolž izbranih koordinatnih smeri. Komponenti sta lahko pozitivni ali negativni in enolično določata ne samo velikost, temveč tudi smer hitrosti.

Komponente pospeška

Podobno definiramo komponenti pospeška in z njima določimo velikost in smer pospeška:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \qquad (18.9)$$
$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$
$$a^2 = {a_x}^2 + {a_z}^2 \,.$$

Zapisane definicije omogočajo izračun hitrosti in pospeškov, če je poznana lega kot funkcija časa. Obratno pot – določitev hitrosti in lege iz pospeškov – pa opravimo z ustreznim integriranjem.

Vse definicije smo sicer postavili na primeru poševnega meta, vendar jih razširimo na vsakršno krivočrtno gibanje v ravnini. Z dodatkom še ena koordinatne osi, pravokotne na prvi dve, pa so definicije veljavne tudi za poljubno prostorsko gibanje. Izbrano trojico koordinatnih osi poimenujemo *koordinatni sistem*.

18.6 Gibanje izstrelkov

Sestavljena hitrost

Ko vržemo kamen z začetno hitrostjo v_0 pod dvižnim kotom θ, je njegovo gibanje sestavljeno iz gibanja vzdolž obeh koordinatnih osi, vodoravne in navpične. Komponenti začetne hitrosti vzdolž vsake izmed osi znašata $v_{x0} = v_0 \cos\theta$ in $v_{z0} = v_0 \sin\theta$. Izkušnja o sestavljanju gibanja pri prečkanju reke nas uči, da predpostavimo naslednje: vodoravno gibanje je enakomerno s hitrostjo v_{x0}, navpično pa je sestavljeno iz enakomernega gibanja navzgor s hitrostjo v_{z0} ter prostega pada navzdol. Tako zapišemo:

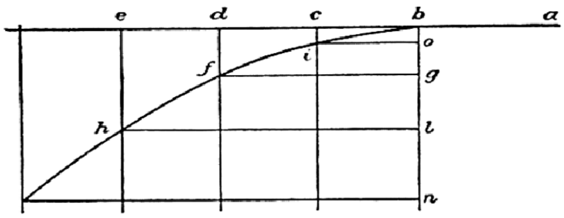
$$v_x = v_{x0} \qquad (18.10)$$
$$v_z = v_{z0} - gt$$

oziroma po integraciji

$$x = v_{x0}t \qquad (18.11)$$
$$z = v_{z0}t - \frac{gt^2}{2} \,.$$

Parabolični tir

Zadnji dve enačbi opisujeta tir gibanja v *parametrični obliki*, to je, vsako izmed koordinat določata posebej preko tretje spremenljivke, v tem primeru časa. Če hočemo videti, kakšen je tir, izrazimo iz prve enačbe čas in ga vstavimo v drugo enačbo, pa dobimo eksplicitno enačbo za $z(x)$. Pokaže se, da je to kvadratna enačba in tir je zato parabola.



Slika 18.3 Vodoravni met. Gibanje kamna v vodoravni smeri je enakomerno, v navpični smeri pa enakomerno pospešeno proti tlom. Tir je parabola. (Galilei, 1638)

Metna dolžina in višina

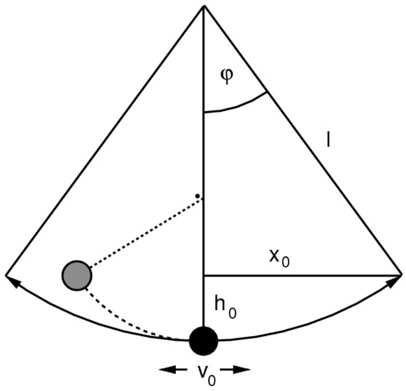
Kako daleč leti kamen? Postavimo $z(x) = 0$ in rešimo enačbo, pa dobimo metno dolžino x_{max}, odvisno od velikosti in smeri začetne hitrosti. — Pri katerem kotu je met najdaljši? Rešimo enačbo $\mathrm{d}x_{\text{max}}/\mathrm{d}\theta = 0$ in dobimo 45°. — Kako visoko se dvigne kamen? Rešimo enačbo $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x = 0$ in dobimo metno višino z_{max}, spet odvisno od začetne hitrosti in kota. — Kakšna je največja metna višina? Očitno tista, pri kateri je začetni kot enak 90° in tam, kjer je navpična hitrost enaka nič. Rešimo enačbo $0 = v_0 - gt$, pa dobimo vzponski čas; ta je enak času prostega padanja s te višine in s tem je višina že določena. — Tako računamo poti izstrelkov, od kamnov in puščic do topovskih krogel. Zanimivo je, da iz izmerjene metne dolžine in začetnega kota lahko izračunamo začetno hitrost izstrelka, ki je sicer težko merljiva. Puščica, ki iz začetnega kota 45° leti 100 m daleč, je morala biti izstreljena s hitrostjo 30 m/s.

Vse povedano velja le takrat, ko zračni upor ne moti prehudo, to je, ko je izstrelek težek in hitrosti niso prevelike. Upor zmanjšuje hitrost gibanja, zato so metne dolžine krajše, višine nižje in parabolični tir deformiran.

18.7 Nihanje nihala

Padanje po loku

Telesa ne padajo samo prosto, ampak tudi vzdolž različno oblikovanih klancev, ki vplivajo na njihovo gibanje. Tako, na primer, pada utež nihala, ki ga odmaknemo iz ravnovesne lege. Utež naj bo drobna in vrvica dolžine l zelo lahka. Utež pada po "klancu", ki ima obliko krožnega loka, z začetne višine h_0. Ta je povezana z začetnim vodoravnim odmikom, *amplitudo* x_0, kot pove hipotenuzni izrek: $l^2 = (l - h_0)^2 + x_0{}^2$. Ob upoštevanju $h_0 \ll l$ iz njega sledi $h_0 = x_0{}^2/2l$. Na dnu loka doseže utež največjo hitrost v_0, nakar se na drugi strani povzpne na začetno višino, se tam za hip ustavi in nato zaniha nazaj. Čas, ki ga porabi utež za nihaj tja in nazaj, poimenujemo nihajni čas t_0.



Slika 18.4 Točkasto nihalo. Uteži, ki "padejo" z iste višine po kakršnemkoli klancu, dosežejo v vznožju enake hitrosti.

Središčna hitrost

Če vrvico pri prehodu skozi ravnovesno lego zaustavimo z žebljem, se "skrajšano" nihalo kljub temu dvigne na začetno višino. Iz tega sklepamo, da je hitrost na dnu enako velika, ne glede na to, po kako oblikovanem klancu se giblje utež, če jo le spustimo vedno z enake višine. To velja tudi za navpični "klanec", po katerem telo prosto pada, torej ${v_0}^2 = 2gh_0$ oziroma $v_0 = x_0\sqrt{(g/l)}$.

Nihajni čas

Nihanje točkastega nihala je takšno, kot če bi nihalo enakomerno krožilo po vodoravnem krogu z radijem x_0 in bi ga gledali od strani vzdolž ravnine kroženja ali opazovali njegovo senco na steni. Obhodni čas je enak nihajnemu in enakomerna obhodna hitrost je enaka nihajni hitrosti skozi ravnovesno lego. Nihajni čas je torej enak $t_0 = 2\pi x_0/v_0$ oziroma (Huygens)

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{18.12}$$

Zanimivo je, da nihajni čas ni odvisen od amplitude, vsaj dokler je ta dovolj majhna. Je pa seveda odvisen od težnega pospeška. Ta je določljiv preko nihajnega časa, ki ga zmoremo – preko mnogo nihajev – zelo natančno izmeriti. Nihalo je torej odličen merilnik težnega pospeška. Meritve pokažejo, da znaša težni pospešek povsod po Zemlji 9,8 m/s^2 z razlikami pod enim odstotkom. Ni nujno, da merimo ravno s točkastim nihalom; kakršnokoli nihalo je dobro, le predhodno ga moramo umeriti s točkastim nihalom in mu določiti "ekvivalentno" dolžino.

Opis nihanja

Vodoravni odmik nihala iz ravnovesne lege je odvisen od časa tako, kakor projekcija enakomerno krožeče uteži na premer kroga. Če začnemo šteti čas takrat, ko je nihalo v ravnovesni legi, velja

$$x = x_0 \sin \omega t \tag{18.13}$$

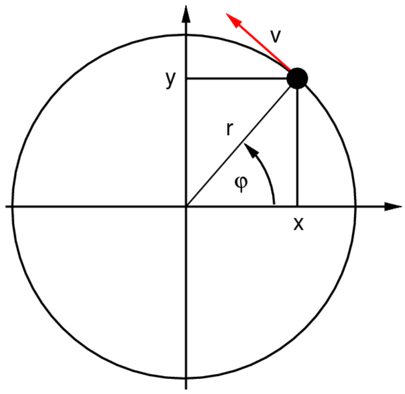
$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi\nu\,.$$

S tem je gibanje popolnoma opisano. Odmiki v eno stran so pozitivni in v drugo negativni. Zaradi krajšega in preglednejšega zapisa smo vpeljali dve pomožni količini. Količino ν poimenujemo *frekvenca* nihanja; enaka je številu nihajev na časovno enoto. *Krožna frekvenca* ω pa pove, kolikšen kot, merjen v radianih, opravi krožeče nihalo v časovni enoti. Z odvajanjem enačbe (18.13) dobimo hitrost v odvisnosti od časa in z nadaljnjim odvajanjem še pospešek. Pri tem ugotovimo, da znaša največja hitrost $v_0 = x_0\omega$, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego, kar se ujema z že znanim. Največji pospešek pa je $a_0 = -x_0\omega^2$ in to v skrajni legi nihala. Pospešek je vedno obrnjen proti središču nihanja.

18.8 Kroženje nihala

Polarne koordinate

Podrobneje preučimo že omenjeno kroženje nihala! Njegova utež se giblje enakomerno po obodu vodoravnega kroga. V središče kroga postavimo koordinatni križ.



Slika 18.5 Vodoravno kroženje nihala. Lega uteži je določena z dvojico "kartezičnih" koordinat x in y, ali pa z dvojico "polarnih" koordinat r in φ.

Lega uteži ob izbranem času je popolnoma določena s projekcijama x in y na obe osi; to sta njeni koordinati. Lahko pa lego opišemo tudi drugače: z radijem r in s kotom φ, štetim od abscise proti ordinati. Rečemo, da sta to *polarni koordinati* za razliko od dosedanjih "navadnih", ki jih poimenujmo *kartezične koordinate*. Med obojimi velja povezava

$$x = r\cos\varphi \qquad (18.14)$$
$$y = r\sin\varphi\,.$$

Opis kroženja

Pri enakomernem kroženju narašča polarni kot sorazmerno s časom; pravzaprav je s tem pogojem enakomerno kroženje šele definirano:

$$\varphi = \omega t\,. \qquad (18.15)$$

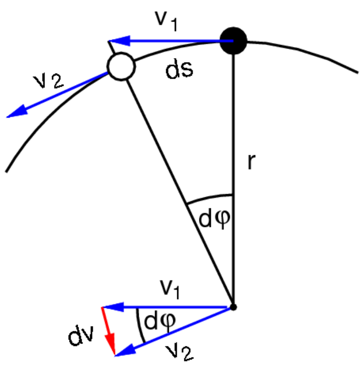
Sorazmernostni koeficient ω poimenujemo *kotna hitrost*; ta je identična z že poznano krožno frekvenco, saj $\varphi/t = 2\pi/t_0$. S časovno odvisnostjo polarnega kota sta določeni tudi časovni odvisnosti obeh kartezičnih koordinat. To sta obenem tudi parametrični enačbi kroga.

Hitrost in pospešek

S kotno hitrostjo in radijem je enolično določene tudi obodna hitrost $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = r\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, torej

$$v = \omega r\,. \tag{18.16}$$

Ta hitrost je po velikosti stalna, po smeri pa se spreminja. Nova hitrostna puščica je določena s staro hitrostno puščico, na katero je nataknjen hitrostni prirastek v primerno kratkem času.



Slika 18.6 Pospešek pri enakomernem kroženju. Obodna hitrost je po velikosti sicer stalna, se pa nenehno spreminja po smeri. Spremembo določimo iz dveh bližnjih obodnih hitrosti, ki ju premaknemo v skupno prijemališče, najbolje kar v center kroženja. Slika kaže, da je sprememba hitrosti dv usmerjena proti središču, Z njo je določen tudi radialni pospešek.

Skica pokaže, da je ta prirastek – sprememba hitrosti v časovni enoti – usmerjen proti središču kroženja. Poimenujemo ga *radialni pospešek*. Njegova velikost znaša $a_\mathrm{r} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = v\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = v\omega$, torej (HUYGENS)

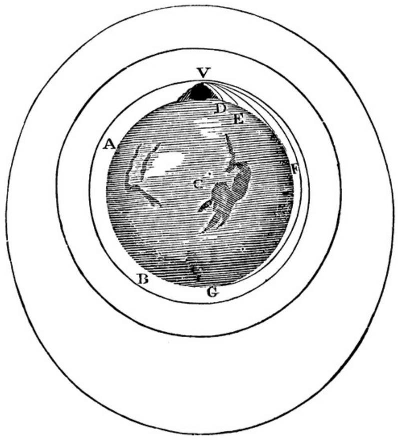
$$a_\mathrm{r} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}\,. \tag{18.17}$$

To je toliko kot maksimalni pospešek pri nihanju, kakor tudi mora biti. Kroženje je torej tudi enakomerno pospešeno gibanje, prav kakor prosti pad, le da pospešek ni usmerjen vzdolž gibanja, marveč pravokotno nanj. Pravzaprav lahko celo rečemo, da krožeče telo nenehno pada proti središču kroženja.

18.9 Kroženje satelitov

Orbitalna hitrost

Krogla, ki jo s hriba izstreli top v vodoravni smeri, prej ali slej pade na tla. Hitrejša kot je, bolj daleč jo nese. Če bi bila dovolj hitra in če ne bi motil zračni upor, sploh ne bi več padla na tla, ampak bi obkrožila Zemljo. V tem primeru bi bil njen radialni pospešek enak težnemu: $v^2/R = g$. Takšna krogla bi morala imeti hitrost $v = \sqrt{(Rg)} = 7{,}9\,\mathrm{km/s}$ in bi Zemljo obkrožila v $t = 2\pi R/v = 1{,}4$ ure. Rečemo, da je to *orbitalna hitrost* krogle.



Slika 18.7 Kroženje hitrega izstrelka okrog Zemlje. Tudi Mesec je svojevrsten, oddaljen izstrelek. Obhodni časi takšnih Zemljinih "satelitov" so odvisni od njihovih krožilnih radijev. (Newton, 1729)

Breztežno stanje

Namesto krožeče krogle si lahko mislimo zaprto kabino. Kabina in vse, kar je v njej, je v nenehnem prostem padu proti Zemlji, prav kakor človek z žogo, ki pada z mosta v vodo. V kabini telesa ne bi padala glede na stene, ampak bi lebdela. To velja seveda tudi za morebitnega potnika. Knjiga, ki bi jo tak potnik držal v roki, ne bi imela nobene teže. In namesto kabine, krožeče vzdolž ekvatorja, si lahko mislimo kar enako hitro vrtečo se Zemljo: telesa na njenem ekvatorju bi nehala padati in bi postala breztežna.

Zakon orbitiranja

Tudi Mesec kroži okrog Zemlje. Njegov obhodni čas glede na zvezdno ozadje (siderični čas) je krajši od časa med dvema polnima menama (sinodskega časa) in znaša 27 dni. Krožeč izstrelek in Mesec sta oba *satelita*, ki obkrožata Zemljo. Izstrelek jo obkroži bližje in v krajšem času, Mesec pa bolj daleč in v daljšem času. Ali morda obstaja kakšna povezava med oddaljenostjo in obhodnim časom satelita? Preizkušanje številskih podatkov pokaže, presenetljivo,

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 . \tag{18.18}$$

To je *orbitalni zakon* (KEPLER). Količine z indeksom 0 se nanašajo na izstrelek, količine brez indeksa pa na Mesec. Ponuja se domneva, da velja ta zakon ne le za izstrelek in Mesec, ampak za poljubna dva satelita na poljubni oddaljenosti od Zemlje.

18.10 Kroženje planetov

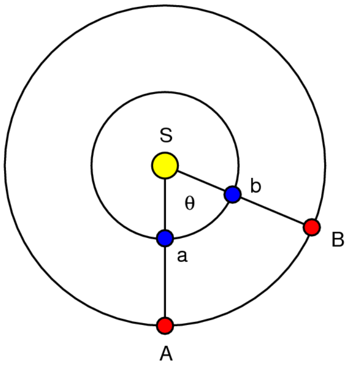
Planeti krožijo okoli Sonca. Pričakujemo, da tudi zanje velja isti zakon orbitiranja kot za Zemljine satelite. Da to preverimo, moramo izmeriti oddaljenost posameznih planetov od Sonca in njihove obhodne čase glede na zvezdno ozadje.

Oddaljenost planetov

Notranja planeta, recimo Venera, se na nebu ne oddaljujeta preveč od Sonca. Kadar je kot med Soncem in Venero največji, tvorijo Sonce, Venera in Zemlja pravokotni trikotnik s pravim kotom pri Veneri. Takrat je razmerje med Venerino in Zemljino oddaljenostjo od Sonca enako sinusu tega kota. Zlahka ga izmerimo in za Venerino oddaljenost izračunamo 0,72-kratnik Zemljine oddaljenosti. Slednjo poimenujemo *astronomska enota*, ua. Za Merkur dobimo 0,39 ua. Zunanji planeti se lahko na nebu od Sonca poljubno kotno oddaljijo. Njihove oddaljenosti zato ne moremo določiti na opisani način.

Obhodni čas planetov

Pri notranjem planetu merimo čas med dvema zaporednima največjima odklonoma od Sonca; to je njegov sinodski čas. Pri zunanjem planetu merimo čas med dvema kulminacijama opolnoči. Tedaj sta Sonce in planet na nasprotnih straneh Zemlje; rečemo, da sta v opoziciji. Tudi to je planetov sinodski čas. Sinodski čas je nasploh časovni interval do takrat, ko se planet vrne v isto lego glede na zveznico Zemlja-Sonce. Iz sinodskih časov moramo izračunati obhodne čase glede na zvezdno ozadje, to je, siderske čase.



Slika 18.8 Obhodni čas planetov okrog Sonca. Ko rdeči Mars opravi pot od A do B, opravi modra Zemlja pot od a okrog Sonca nazaj v a in nato še v b. Položaja SaA in SbB poimenujemo Marsovi opoziciji.

Zemlja ima sidersko periodo $t_1 = 1$ leto. Zemlja torej kroži glede na zvezdno ozadje s kotno hitrostjo $360°/t_1$. Zunanji planet, recimo Mars, ima (še neznano) sidersko periodo t_2 in se giblje s kotno hitrostjo $360°/t_2$. Marsova perioda je daljša od Zemeljske, zato je njegova kotna hitrost manjša. Naj bosta Zemlja in Mars v opoziciji. Ko naredi Zemlja cel krog in še kot θ zraven, spet ujame Mars v opozicijo; ta je medtem prepotoval samo kot θ. Čas, da Mars preleti kot θ (torej čas med dvema zaporednima opozicijama), je, po definiciji, njegov sinodski čas T_2. Zemlja preleti kot θ v času $T_2 - t_1$. Torej velja za Mars $\theta = (360°/t_2)T_2$ in za Zemljo $\theta = (360°/t_1)(T_2 - t_1)$. Enačbi izenačimo in dobimo za Mars, torej za zunanji planet, naslednjo povezavo med sinodskim T in siderskim t časom

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\,. \tag{18.19}$$

Za notranji planet pa samo zamenjamo t_1 in t_2 med seboj. Tako iz izmerjenih sinodskih časov izračunamo siderske čase vseh planetov: Merkur 0,24 let, Venera 0,62 let, Mars 1,9 let, Jupiter 11,9 let in Saturn 29,5 let.

Zakon orbitiranja

Oddaljenosti in obhodni časi za notranje planete, vključno z Zemljo, pokažejo, da se pokoravajo istemu zakonu za kroženje okrog Sonca, kot sateliti za kroženje okrog Zemlje. Zato predpostavimo, da velja zakon tudi za zunanje planete. To nam omogoči, da izračunamo njihove razdalje, ki znašajo za Mars 1,5 ua, za Jupiter 5,2 ua in za Saturn 9,5 ua.

Zakon orbitiranja lahko zapišemo v obliki $t^2/r^3 = {t_0}^2/{r_0}^3 = \mathrm{const}$ in izračunamo konstanto enkrat za vselej. Pokaže se, da je ta konstanta za kroženje okrog Sonca drugačna, kot za kroženje okrog Zemlje. Očitno ima nekaj opraviti s "privlačnostjo" telesa, okrog katerega poteka orbitiranje. □

19 Sile in gibanje

Teža in pospešek – Teža in masa – Gibalni zakon – Izračuni gibanja – Vpliv trenja na gibanje – Inercialni sistemi – Vrteči se sistem – Energija pri gibanju – Splošna gravitacija – Gravitacijsko polje – Gibanje po osončju – Plimovanje snovi

19.1 Teža in pospešek

Dvigalo

V dvigalu, ki se giblje enakomerno navzgor ali enakomerno navzdol glede na stavbo, padajo kroglice glede na steno dvigala z enakim pospeškom kot v stavbi: $g' = g$; črtica označuje pospešek glede na dvigalo. Tudi nihajni čas nihala je enak. In teža telesa, obešenega na vzmetni tehtnici, je prav tako enaka. Vse to ugotovimo s poskusi.

Pospešeno dvigalo

Ko se dvigalo iz mirovanja pospešuje navzgor s stalnim pospeškom a, opazovalec v njem izmeri – iz prostega pada kroglic glede na steno dvigala ali, bolje, iz nihanja nihala – večji lokalni pospešek padanja: $g' = g + a$. Tudi teža predmetov, kakor jo kaže vzmetna tehtnica, je povečana. Obratno je pri pospeševanju iz mirovanja navzdol: lokalni pospešek padanja je manjši: $g' = g - a$. Tudi teže teles se zmanjšajo. Teža torej ni nespremenljiva, ampak je odvisna od kraja in gibanja opazovalnega sistema. V pospešenem dvigalu je drugačna kot v "mirujoči" stavbi. Poseben mejni primer je dvigalo, ki prosto pada. V njem opazovalec ne bi izmeril nobenega pospeška in telesa, vključno z opazovalcem, ne bi imela nobene teže. To lepo vidimo, ko z mosta skočimo v reko in pri tem v rokah držimo žogo.

19.2 Teža in masa

Masa telesa

Poskusi v dvigalih in zunaj njih – bolj v mislih kot zares – pokažejo, da je teža F_g izbranega telesa (merjena z vzmetno tehtnico) vedno sorazmerna z lokalnim pospeškom padanja g (merjenim z nihalom):

$$F_g = mg \,. \tag{19.1}$$

To je *težna enačba* (NEWTON). Sorazmernostni koeficient m je za izbrano telo vedno in povsod enak, je torej njegova nespremenljiva lastnost. Ne spreminja se nikdar, razen če telesu dodamo ali odvzamemo kaj snovi. Poimenujemo ga *masa*. Ker je masa lastnost telesa, teža pa je očitno odvisna tako od telesa kot od okolja, proglasimo maso za osnovno količino in težo za izpeljano. Tako deklariramo, da ima 1 dm^3 vode maso 1 *kilogram* (kg); težo masne enote 1 kg pri lokalnem pospešku 1 $\mathrm{m/s^2}$ (če je kje tak kraj) poimenujemo 1 *newton* (N); in za težo masne enote 1 kg pri pospešku 9,8 $\mathrm{m/s^2}$, torej za težo 9,8 newtona, obdržimo pomožno ime kilopond. Vzmetna tehtnica torej meri težo telesa, vzvodna pa njegovo maso preko primerjave dveh tež, saj sta pospeška na obeh straneh tehtnice enaka. Masi 10^3 kg bomo priložnostno rekli tudi 1 tona (t).

Izpeljane enote

Zdaj, ko smo vpeljali novo enoto za silo – newton, zapišimo še druge enote, ki se z njo izražajo. Tlak $p = F/S$ dobi, na primer, enoto N/cm^2. Enota $10\,N/cm^2$ je zelo blizu enoti $1\,kp/cm^2$ in jo poimenujemo na kratko *bar*. Tisočkrat manjši je *milibar*. Povprečni zračni tlak na morski gladini, torej $1{,}03\,kp/cm^2$ oziroma 1 atmosfera [10.3], znaša 1013 milibarov. Če nismo preveč natančni, so kp/cm^2, bar in atmosfera kar sinonimi. Delo $A = Fs$ izrazimo z newton-metri in to enoto poimenujemo *joule*: $Nm = J$. Prav takšno enoto dobi tudi težna energija. In moči, torej delu na časovno enoto $P = A/t$, pritiče enota joule na sekundo, kar na kratko poimenujemo *watt*: $J/s = W$.

Gostota telesa

Po zgledu specifične teže σ (9.3) definiramo še *specifično maso* snovi

$$\rho = \frac{m}{V}\,. \tag{19.2}$$

Krajše ji rečemo *gostota*. Očitno velja

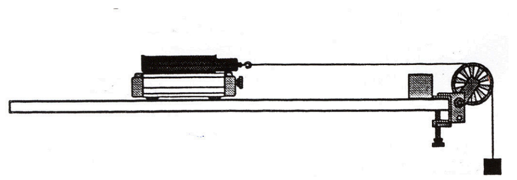
$$\sigma = \rho g\,. \tag{19.3}$$

Že poznane specifične teže snovi, izmerjene pri težnem pospešku $9{,}8\,m/s^2$ in izražene v kp/dm^3, so torej številsko natanko enake gostotam, izraženim v kg/dm^3.

19.3 Gibalni zakon

Vzdolžna sila

Na vodoravnem tiru naj miruje voziček z maso m in z lahkimi kolesi. Privežemo ga na vrvico, jo speljemo preko lahkega škripca in nanjo obesimo utež z maso μ. Utež začne padati in voziček se začne premikati, oba z istim, stalnim pospeškom a. Pospešek izmerimo z metrom in uro štoparico.



Slika 19.1 Gibanje vozička pod vplivom stalne sile. Voziček se giblje enakomerno pospešeno. Pospešek vozička je sorazmeren s silo nanj in obratno sorazmeren z njegovo maso. Prikazana je skica šolskega poskusa. (Pasco Scientific)

Na padajočo utež pogledamo kot na mirujočo utež v padajočem dvigalu (v katerem znaša lokalni pospešek padanja $g' = g - a$), zato vleče utež vrvico s silo $\mu(g - a)$. Ta sila se – presenetljivo – pokaže za enako produktu ma:

$$\mu(g - a) = ma\,. \tag{19.4}$$

Seveda bi lahko voziček namesto s padajočo utežjo vlekli z roko ali potiskali s pihanjem zraka ali še kako drugače. Rezultat zato posplošimo na vse vrste sil in ter postuliramo: kadar se telo mase m giblje s pospeškom a, deluje nanj naslednja sila v isti smeri kot pospešek:

$$F = ma = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,. \tag{19.5}$$

To je *gibalni zakon* (NEWTON). Čim večja je masa telesa in čim večji pospešek doživlja telo, tem večja sila deluje nanj. Ob delovanju "enako velike" sile pa doživlja telo tem manjši pospešek, čim večjo maso ima. Masa telesa torej ne določa le, kako je telo težko, ampak tudi, kako se upira spremembi gibanja, to je, kako je vztrajno. Rekli bomo, da se masa kaže kot *težka masa* ali *vztrajna masa*.

Poševna sila

Kadar sila ne deluje vzporedno s hitrostjo, ampak poševno nanjo, je gibanje krivočrtno. Gibanje tedaj obravnavamo kot sestavljeno iz dveh (ali treh) komponent vzdolž dveh (ali treh) koordinatnih osi. Te so med seboj pravokotne. Usmerjene so lahko poljubno, vendar raje izberemo takšne, da je računanje lažje. Zgled je poševni met kamna z vodoravno in navpično komponento. Za vsako komponetno posebej velja gibalni zakon:

$$\begin{aligned} F_x &= m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ F_z &= m\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,. \end{aligned} \tag{19.6}$$

V vsakem trenutku sta pospešek in sila določena s hipotenuzno vsoto svojih komponent. Sila je zato vedno enako usmerjena kot pospešek in velikost sile je sorazmerna z velikostjo pospeška.

Sila je torej, po postulatu, določena s pospeškom. S tem dosedanjo definicijo sil v mirovanju razširimo na definicijo pri gibanju, namreč preko pospeškov, in jih tako tudi merimo. Na kakšnem območju zakon velja – pri katerih masah in hitrostih – bo pa morala pokazati njegova uporaba. Zaenkrat ne vidimo nobenih omejitev.

19.4 Izračuni gibanja

Gibalni zakon služi za določitev sile iz izmerjenega gibanja. Če pa že poznamo silo, lahko izračunamo gibanje. Naredimo to za najpreprostejše sile, vzporedne s hitrostjo.

Ničelna sila

Pri saneh na ledeni ploskvi je sila v vodoravni smeri $F = 0$. Gibalni zakon se torej glasi $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$. To je enačba, v kateri nastopajo diferenciali spremenljivk, zato ji rečemo *diferencialna enačba*. Če vanjo vstavimo pravo funkcijo, se enačba spremeni v identiteto. Tedaj rečemo, da je ta funkcija rešitev diferencialne enačbe.

Kako naj najdemo rešitev zapisane enačbe? Pove nam sama. Pravi namreč, da je odvod iskane funkcije enak nič, torej mora biti ta funkcija konstanta: $v = v_0$. Ko sedaj poznamo hitrost, izračunamo še lego, in sicer iz definicijske enačbe za hitrost: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$. To je spet diferencialna enačba. Zapišemo jo kot $\mathrm{d}x = v_0\,\mathrm{d}t$ (ločimo spremenljivki) in integriramo, pa dobimo enakomerno gibanje $x = x_0 + v_0 t$ s poljubno začetno lego x_0 in hitrostjo v_0.

Sila teže

Padajoči kamen čuti silo $F = -mg$. Negativni predznak upošteva, da smo vertikalno os usmerili navzgor. Ustrezajočo diferencialno enačbo $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -g$ preuredimo z ločitvijo spremenljivk, integriramo in dobimo hitrost v, nakar iz nje na že znani način pridelamo enakomerno pospešeno gibanje $z = z_0 + v_0 t - gt^2/2$. Začetna lega in hitrost sta poljubni; pozitivna hitrost opisuje met navzgor in negativna met navzdol. Rezultat potrjuje, da vsa telesa padajo enako.

Gugalna sila

Točkasto nihalo z dolžino l in maso m čuti pri majhnem odmiku x silo $F = -mg \cdot x/l$. Gibalna enačba ima zato obliko $x'' = -(g/l)x$. Pravi torej, da je drugi odvod iskane funkcije enak tej funkciji, le z nasprotnim predznakom. Ali poznamo takšno funkcijo? Da, sinus in kosinus. Obe sta rešitvi. Katero izberemo, je odvisno od tega, od kje želimo šteti čas – v središčni legi ali v amplitudi. Izberemo sinus in vstavimo nastavek $x = x_0 \sin \omega t$ v enačbo, pa ugotovimo, da je to prav, ako $\omega = \surd(g/l)$. Tako tudi mora biti (18.12). Napovedano nihanje ni odvisno od mase.

Sila vzmeti

Gibalni zakon za vse prikazane primere napove gibanja, ki jih poznamo že od prej in se ujemajo s poskusi. To močno okrepi zaupanje v njegovo veljavnost. Pravo moč pa zakon seveda dobi, ko z njim rešimo kakšen nov problem. Naj bo to utež, obešena na lahki vzmeti. Kako se utež giblje, ko jo povlečemo iz ravnovesne lege navzdol in jo spustimo?

Poskus pove, da je sila vzmeti odvisna od raztezka s; pri majhnih raztezkih velja kar sorazmernost: $F = ks$; konstanta k je odvisna od snovi, oblike in velikosti vzmeti. Ko na vzmet obesimo utež z maso m, se raztegne za s v ravnovesno lego. Tam je vsota vseh sil na utež enaka nič: $ks - mg = 0$. Pri odmiku za z iz ravnovesne lege deluje na utež sila $F = k(s - z) - mg = -kz$. Ustrezna enačba gibanja je zato $z'' = -(k/m)z$. To je prav takšna enačba kot pri gugalni sili. Enake enačbe imajo enake rešitve: utež torej niha s frekvenco $\omega = \surd(k/m)$. Za razliko od prej pa je frekvenca odvisna od mase. Rezultat potrdimo s poskusom. Uporaben je tudi za določanje konstante vzmeti iz izmerjenega nihajnega časa.

19.5 Vpliv trenja na gibanje

Pri vseh izračunih gibanja smo zanemarili vpliv trenja. Vemo pa, da trenje s podlago in upor zraka zaustavljata gibanje. Raziščimo podrobnosti!

Trenje najlaže preučimo s primernim telesom, recimo z lesenim kvadrom, ki ga vlečemo z vzmetnim silomerom po vodoravni podlagi. — Kvader se ne premakne, dokler vlečna sila ne doseže neke mejne vrednosti. S tem je določena njej nasprotna *maksimalna sila lepenja*. Poskus pokaže, da je sorazmerna z normalno silo, s katero kvader deluje na podlago: $F_\mathrm{l} = k_\mathrm{l} F_\perp$. Normalna sila je seveda kar teža kvadra. Sorazmernostni koeficient je odvisen od vrste in gladkosti stičnih površin. Za jeklo na jeklu znaša kakšnih 0,8. Sila lepenja ni odvisna od velikosti stične ploskve. — Ko se kvader premakne, je za vzdrževanje njegovega enakomernega gibanja potrebna določena sila. S to silo je določena njej nasprotna *sila trenja*, ki je nekaj manjša od sile lepenja. Tudi sila trenja je sorazmerna z normalno silo: $F_\mathrm{t} = k_\mathrm{t} F_\perp$. Sorazmernostni koeficient za trenje je nekaj manjši kot za lepenje. Za jeklo na jeklu znaša kakšnih 0,6. Sila trenja ni odvisna od velikosti stične ploskve, niti od hitrosti vleke.

Zračni upor je bolj zamotan. Odvisen je namreč od oblike telesa in od njegove hitrosti. To lepo čutimo, ko se s sanmi spuščamo po dolgem in strmem klancu. Upor narašča s hitrostjo. Dokler je hitrost majhna, je morda dobra kar linearna odvisnost $F_\mathrm{u} \propto v$. Sorazmernostni koeficient je gotovo odvisen od oblike in razsežnosti telesa. Podrobnejše raziskave moramo pustiti za prihodnost.

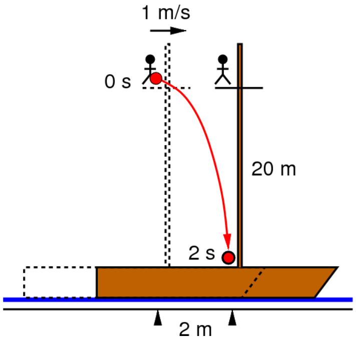
Vpliv trenja in zračnega upora na gibanje teles je očiten. Vodoravno drseče sani se prej ali slej ustavijo. Prosto padajoče telo ali telo na klancu se čedalje manj pospešujeta in se na koncu gibljeta enakomerno. Odmiki nihala – težnega ali vzmetnega – pa se počasi zmanjšujejo, dokler se nihalo povsem ne ustavi. Vse to bi sicer lahko izračunali iz enačbe gibanja (19.5), v katero bi vstavili sili trenja in upora, vendar bomo raje počakali, dokler obeh ne spoznamo bolj natančno.

19.6 Inercialni sistemi

Relativnost gibanja

Preučevano gibanje, recimo prosti pad kamna, se ne da opisati drugače kot relativno glede na kakšen koordinatni sistem. Pojavi se vprašanje, kako bi isto gibanje opisali v kakem drugem *opazovalnem sistemu*.

Ob pomolu naj pluje ladja z enakomerno hitrostjo. V opazovalnem košu na vrhu jambora sedi mornar. Iz rok mu pade jabolko. Glede na ladjo pada jabolko premočrtno in navpično vzdolž jambora, glede na pomol pa zariše parabolo vodoravnega meta. Kako se telesa gibajo, je torej odvisno od tega, v katerem opazovalnem sistemu jih gledamo. Rečemo, da je gibanje relativno.



Slika 19.5 Padec jabolka z jambora. Ladja se glede na pomol giblje premo in enakomerno. Glede na ladjo pada jabolko navpično navzdol, vseskozi tik ob jamboru. Glede na pomol pa opiše parabolo.

Transformacija gibanja

Ladja in pomol sta zgled dveh opazovalnih sistemov, ki se drug glede na drugega gibljeta premočrtno in s stalno hitrostjo. Rečemo, da sta to *inercialna sistema*. Vzdolž "mirujočega" pomola naj poteka os x in vzdolž "gibajoče se" ladje os x'. Osi z in z' naj bosta usmerjeni navpično navzgor. Čas štejemo z dvema urama: eno ima opazovalec na pomolu in drugo mornar na krovu ladje. Oba časa, t in t', začnemo šteti, ko sovpadata izhodišči obeh sistemov, recimo steber na pomolu in jambor na ladji. Takrat – in kasneje – se naj izhodišče ladje giblje s hitrostjo u glede na pomol, kakor jo izmeri tamkajšnji opazovalec.

Čas kakega dogodka, recimo pristanek galeba na gladino morja, izmerita opazovalca vsak s svojo uro. Brez presenečenja ugotovita, da zmeraj velja

$$t' = t\,. \tag{19.7}$$

Rečemo, da teče čas v obeh sistemih enako, da je *absoluten*. Vseeno je, s katerim časom potem dogodke opisujemo.

Lego kakšnega telesa, recimo galeba na gladini morja, ob času t opišemo v prvih ali drugih koordinatah, (x,z) ali (x',z'). Med obema sedlamo takole:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{19.8}$$

Za vodoravne in navpične hitrosti – odvode ustreznih koordinat po času – velja

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x - u \\ v_z' &= v_z\,. \end{aligned} \tag{19.9}$$

Pospeški opazovanega telesa vzdolž katerekoli osi – odvodi hitrosti po času – so pa v obeh sistemih enaki:

$$\begin{aligned} a_x' &= a_x \\ a_z' &= a_z\,. \end{aligned} \tag{19.10}$$

To pomeni, da opazovalec v prvem opazovalnem sistemu meri enake sile kot v drugem. Opazovalec na ladji, zaprt v podpalubju, zato iz gibalnih poskusov nikakor ne more ugotoviti, ali ladja miruje ali se enakomerno giblje.

19.7 Vrteči se sistem

Opazovalna sistema se lahko drug glede na drugega gibljeta tudi neenakomerno; na primer pospešeno dvigalo ali dvoriščni vrtiljak z navzgor usmerjeno osjo vrtenja. Podrobneje poglejmo vrtiljak, ki se – gledano od zgoraj – vrti v nasprotni smeri urinega kazalca!

Sredobežna sila

Krogla, ki je z vrvico privezana na os vrtenja in miruje glede na tla vrtiljaka, glede na dvorišče enakomerno kroži. Opazovalec na dvorišču sklepa takole: krogla se giblje pospešeno, saj se ji spreminja smer, zato mora nanjo delovati sila v smeri radialnega pospeška (18.17), torej sila

$$F = m\omega^2 r \tag{19.11}$$

proti osi vrtenja. To je sila vrvice na kroglo. Rečemo ji *sredotežna sila* (HUYGENS). Opazovalec na vrtiljaku pa sklepa drugače: krogla miruje, zato mora biti vsota vseh sil nanjo enaka nič. Eno je neka sila, reče ji *sredobežna sila*, ki vleče kroglo proti robu, drugo je pa nasprotna sila vrvice na kroglo. Sredobežna sila je za opazovalca sestavni del njegovega sveta: zdi se, da robne stene privlačijo mirujoča telesa in to tem bolj, čim bližje so jim. Opazovalec lahko sredobežno silo izmeri z vzmetno tehtnico in dobi enako velikost, kot dvoriščni opazovalec izračuna za sredotežno silo.

Odklonska sila

Krogla, ki jo opazovalec na vrtiljaku zakotali iz sredine v radialni smeri, se za dvoriščnega opazovalca giblje premočrtno in enakomerno glede na dvorišče. Zato sklepa, da je vsota sil nanjo enaka nič. Opazovalec na vrtiljaku pa vidi, da ta krogla po tleh vrtiljaka začrta pot, ki je ukrivljena proti desni. Podobno se zgodi s kroglo, ki jo zakotali s kateregakoli mesta na vrtiljaku v katerokoli smer. Opazovalec na vrtiljaku zato sklepa, da v njegovem svetu na vsako vodoravno gibajoče se telo deluje sila, usmerjena desno pravokotno na smer gibanja. To silo poimenuje *odklonska sila*. Kolikšna je?

Vrtiljak opremimo s koordinatnim križem (x',y') in dvorišče s križem (x,y). Os vrtiljaka je izhodišče obeh križev. Vrtiljakov križ se vrti, zato katerikoli njegovi koordinati (kjer je krogla) izrazimo z dvoriščnimi takole: $x' = x\cos\omega t$ in $y' = y\sin\omega t$. Enačbi dvakrat odvajamo po času. Členi, ki vsebujejo dvoriščne pospeške, so enaki nič, saj je gibanje premo enakomerno. Preostanejo členi, od katerih so eni odvisni od dvoriščne hitrosti in drugi od dvoriščne lege. Prvi so komponente odklonskega pospeška in drugi komponente sredobežnega pospeška. Iz obeh komponent odklonskega pospeška sledi njegova velikost in ko jo pomnožimo z maso, še iskana sila (CORIOLIS):

$$F = 2m\omega v\,. \tag{19.12}$$

Hitrost v je merjena glede na vrtiljak. Sila deluje pravokotno nanjo.

Enakopravnost sistemov

Dvoriščni opazovalec trdi, da se vrtiljak vrti. Vendar lahko tudi opazovalec na vrtiljaku trdi, da se pravzaprav vrti dvorišče. Ali sta sistema res enakopravna? Nista. Na dvorišču deluje na telo z maso sorazmerna sila, ki ima izvor v okolišnjih telesih, namreč Zemlji. Na vrtiljaku pa dve tovrstni sili, sredobežna in odklonska, nimata nobenega izvora v okolici. Pripisati jih moramo pospešenemu gibanju opazovalnega sistema.

Zemlja kot vrtiljak

Seveda živi tudi dvoriščni opazovalec na vrtiljaku: Zemlja se vrti okrog svoje osi in kroži okrog Sonca; in tudi Sonce se verjetno giblje krivočrtno glede na zvezde. Zaradi tega na Zemlji čutimo številne sistemske sile, vendar so vse majhne v primerjavi s privlakom Zemlje in so večinoma zanemarljive. Sredobežna sila na ekvatorju odvzema telesu manj kot 1 % teže in odklonska sila na topovsko kroglo na polu znaša tudi manj kot 1 % njene teže. Težni pospešek, ki ga merimo z nihalom, vedno vključuje vpliv vseh sredobežnih in odklonskih sil.

19.8 Energija pri gibanju

Tobogan

V zabaviščnih parkih gradijo podjetniki tobogane – zavite tire, polne hribov, dolin in stranskih zavojev, po katerih se z začetne višine spuščajo vozički s potniki. Tak voziček drsi po tiru in ima v vsaki točki poti neko višino in neko hitrost. Vožnje kažejo, da je hitrost v dolinah večja kot na hribih, in da se voziček nikakor ne more povzpeti višje, kot je bila njegova začetna višina. To nas spominja na nihalo in ni nič čudnega: saj je slednje pravzaprav le preprost tobogan. Pričakujemo torej, da sta hitrost in višina telesa pri obeh gibanjih – tobogánskem in nihalnem – povezani na enak način. Poskusimo izpeljati to povezavo!

Slika 19.2 Sobni model tobogana – zavit tir, po katerem drsi voziček. Čim globlje se spusti, tem večjo hitrost pridobi. Če ne bi bilo trenja in zračnega upora, se gibanje ne bi nikdar ustavilo. (Anon)

Kinetična energija

Kratek kos tobogana je raven klanec. Na tamkajšnji voziček delujejo teža, tir, trenje, zračni upor in morda še kaj. Vsota vseh teh sil vzdolž klanca znaša $F_\parallel$ in velja gibalni zakon $F_\parallel = m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Voziček se premakne vzdolž klanca za pot ds. Produkt sil in premika znaša $F_\parallel \mathrm{d}s = m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$. Integriramo vzdolž zaporednih klancev od začetne točke 1 do končne točke 2 in dobimo:

$$\int F_\parallel \,\mathrm{d}s = \frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} = \Delta K \,. \tag{19.13}$$

Zapisani integral je razširitev definicije dela, kakor smo ga že spoznali (9.12), in sicer od "uravnovešene" sile na "neuravnovešeno" silo. Seveda ga še naprej imenujemo delo. Je pa zdaj enako spremembi količine $K = mv^2/2$, ki jo poimenujemo *kinetična energija* vozička. Delo vseh sil, ki delujejo na telo, je torej enako spremembi njegove kinetične energije. To je *izrek o kinetični energiji*.

Izrek seveda vključuje tudi enakomerno potiskanje telesa po klancu navzgor. Tedaj delujeta na telo dve sili: potisk navzgor in teža navzdol. Sili sta nasprotno enaki, njuna rezultanta je enaka nič, zato sta enaka nič tudi celotno vloženo delo in sprememba kinetične energije.

Težna energija

K delu prispeva vzporedna komponenta teže $F_{g\|}$ in preostale tangentne sile $F_{\mathrm{other}\|}$. Celotno delo zato zapišemo kot $\int (F_{\mathrm{other}\|} + F_{g\|})\,\mathrm{d}s$. Delo teže lahko izračunamo, saj $F_{g\|}\mathrm{d}s = -mg\mathrm{d}h$. Integriranje po katerikoli poti od točke 1 do točke 2 pove

$$-\int F_{g\|}\,\mathrm{d}s = mgh_2 - mgh_1 = \Delta W\,. \tag{19.14}$$

Količina $W = mgh$ je stara znanka, težna energija telesa (9.12). Negativni predznak skrbi za to, da je pri spustu, ko je delo teže pozitivno, sprememba težne energije negativna, torej da se težna energija zmanjša. Vseeno je, kje izberemo izhodišče $h = 0$ za merjenje višine: na morski gladini, na dnu tobogana, na vrhu tobogana ali kje drugje. Štejejo le razlike višin, ki so neodvisne od izbire izhodišča. Pri gibanju po toboganu torej velja

$$\int F_{\mathrm{other}\|}\,\mathrm{d}s = \Delta K + \Delta W. \tag{19.15}$$

Delo vseh sil razen teže je enako spremembi kinetične in težne energije. To je *izrek o kinetični in težni energiji*. Če ni takih sil oziroma če so zanemarljive, je torej vsota kinetične in težne energije konstantna:

$$K + W = \mathrm{const}\,. \tag{19.16}$$

Kinetično in težno energijo merimo v istih enotah kot delo, torej v joulih.

Ohranitev energije

Vsoto kinetične in težne energije bomo poimenovali *mehanska energija*. Pri gibanju po tiru se ohranja, če ne motita trenje in zračni upor, sicer se pa zmanjšuje. Ni treba, da je tir gibanja določen s tračnicami, ampak ga lahko zarezuje telo samo pri prostem gibanju. Tako se mehanska energija ohranja pri vodoravnem drsenju, prostem padu, poševnem metu, drsenju po klancu, nihanju nihala, kroženju nihala in podobnem. Posebej za nihanje velja $K + W = {}^1/_2\, mv_0{}^2 = {}^1/_2\, m\omega^2 x_0{}^2$.

Namesto vozička lahko po klancu ali toboganu kotalimo kroglice. Hitrost kroglice opišemo s hitrostjo njenega središča v_*. Če pod kinetično energijo kroglice slepo razumemo $mv_*{}^2/2$, pa zapisani zakon o ohranitvi mehanske energije ne velja. Deli kroglice se namreč ne gibljejo vsi z isto hitrostjo kakor pri vozičku, ampak dodatno krožijo okrog središča. Te dele je bilo potrebno pospešiti in za to je gotovo potrebno nekaj dela. Zato pričakujemo, da je delo vseh sil večje od spremembe omenjene "narobne" kinetične energije. Drugače rečeno: kotaleča se krogla mora na dnu klanca imeti manjšo hitrost kot brez trenja drseč voziček. S tem tudi upravičimo dosedanjo zahtevo, naj imajo vozički lahka kolesa in naj jih vlečejo vrvice preko lahkih škripcev. Morda pa se da iznajti "pravo" kinetično energijo, za katero bo zakon veljal? Prepustimo to nalogo za prihodnje.

19.9 Splošna gravitacija

Doseg težnosti

Z drevesa pade jabolko na tla. Zakaj? Očitno ga privlači Zemlja in ko pecelj popusti, se začne jabolko gibati pod njenim vplivom. Ali bi jabolko padlo tudi z višjega drevesa? Seveda bi. Kaj pa, če bi bilo drevo zelo visoko – do kam pravzaprav sega težna privlačnost Zemlje? Ali z razdaljo kaj slabi? Morda sega celo do Meseca in še dlje? Kaj pa, če je Mesec sam takšno "jabolko", ki kroži – torej prosto pada – okrog Zemlje prav zaradi njene težne privlačnosti? In če Zemlja privlači Mesec, kaj nemara Sonce ne privlači planetov, ki krožijo okrog njega, s silo prav take vrste? In če Zemlja privlači Mesec, kaj ne privlači tudi Mesec Zemlje? Morda je pa takole: vsaki dve masni točki na svetu se medsebojno težno privlačita; silo poimenujemo *gravitacijska sila*.

Slika 19.3 Pad jabolka z jablane. Kip pripoveduje, kako je bojda prišlo do odkritja zakona o splošni gravitaciji. (Oxford Science Museum, Oxford)

Gravitacijska sila

Vemo, da planet mase m kroži okoli Sonca mase M po orbitalnem zakonu $r^3 / T^2 = \text{const.}$ Radialni pospešek planeta znaša $a_\mathrm{r} = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$. Iz prve enačbe izrazimo T^2 in ga vstavimo v drugo, pa dobimo $a_\mathrm{r} \propto 1/r^2$. To je torej težni pospešek g, s katerim pada planet na Sonce. Gravitacijska sila Sonca na planet je zato $F_\mathrm{g} \propto m/r^2$. Mislimo si, da kroženje ustavimo. Gravitacijska sila ostaja nespremenjena. Enakopravnost obeh mas in zakon o vzajemnem učinku pa nas vodita na sklep, da za dve poljubni masni točki m in M na razdalji r velja

$$F_\mathrm{g} = \kappa \frac{mM}{r^2} \ . \qquad (19.17)$$

To je *gravitacijski zakon* (NEWTON). Sorazmernostna *gravitacijska konstanta* κ pove, s kakšno silo se privlačita dve znani masi na znani oddaljenosti. Moramo jo še določiti.

Gravitacijska konstanta

Privlačna sila med dvema priročno velikima in težkima svinčenima kroglama je tako majhna, da je za naše dosedanje merilne pripomočke nezaznavna. Zato zaenkrat tudi ne moremo določiti gravitacijske konstante. Lahko jo pa ocenimo: namesto ene krogle (z izmerjeno maso) uporabimo kar celo Zemljo, ki ji maso ocenimo iz gostote in velikosti. Za gostoto vzamemo sredino med apnencem in železom, torej $5\,\mathrm{kg/dm^3}$, in dobimo za maso $\sim 5\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Predpostavimo, da je vsa ta masa zbrana v središču. Za drugo kroglo pa si mislimo kar kamen z maso 1 kg, za katerega vemo, da ga Zemlja privlači s silo 1 kp, oddaljenost med obema pa je enaka Zemljinemu radiju. Tako dobimo $\kappa \sim 7\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

19.10 Gravitacijsko polje

Jakost polja

Na to, da se dve točkasti telesi privlačita z gravitacijsko silo, lahko pogledamo tudi takole: prvo telo z maso M ustvarja okoli sebe polje gravitacijskega pospeška $g(r)$ in drugo telo z maso m, potopljeno v to polje, čuti gravitacijsko silo $F_\mathrm{g} = mg(r)$, odvisno od lokalnega pospeška. Velja torej

$$g = \kappa \frac{M}{r^2}\,. \tag{19.18}$$

Pospeški kažejo, kako je polje "močno", to je, s kakšno silo deluje na enoto mase. Zato bomo gravitacijskemu pospešku rekli tudi *jakost gravitacijskega polja*. Nadalje bomo rekli, da polje *izvira* iz teles oziroma da so telesa njegovi *izvori*. Čim večja je masa izvora, tem močnejše je njegovo gravitacijsko polje.

Sestavljeno polje

Vsako točkasto telo – od daleč gledana Zemlja, Mesec ali Sonce – je izvor krogelnega gravitacijskega polja. Ta polja se med seboj prepletajo in sestavijo v skupno, enovito polje. Jakost gravitacijskega polja v izbrani točki je paralelogramska vsota vseh posamičnih jakosti. Razsežna telesa – od blizu gledana Zemlja, na primer – pa si lahko mislimo kot sestavljena iz primerno majhnih "točkastih" delov in obdana z ustreznim poljem.

Polje slojevite krogle

Kakšno je gravitacijsko polje v bližini Zemlje? Sešteti bi morali prispevke vseh njenih delov, kar je kar hud zalogaj. Ponuja pa se naslednja drzna domneva: polje v bližini slojevite krogle je morda takšno, kot da bi bila vsa njena masa združena v središču. Pravzaprav smo to že uporabili, ko smo ocenjevali velikost gravitacijske konstante.

Če označimo pospešek na Zemljinem površju z g_0, njen polmer z R in nadmorsko višino s h, velja $g/g_0 = R^2/(R+h)^2$, torej

$g = g_0/(1 + h/R)^2$ oziroma za majhne višine – z razvojem v dva člena binomske vrste – $g = g_0(1 - 2h/R)$. Na najvišjih gorah je le za 0,3 % nižji kot ob morski gladini.

Različne krogle – Sonce in planeti – imajo seveda različne pospeške na svojem površju. Zanimajmo se le za relativne velikosti pospeškov, ne za absolutne, pa zapišimo $g \propto M/R^2$. Izpustili smo sorazmernostno konstanto κ. Vemo tudi, da velja $M \propto \rho R^3$, spet z izpuščeno sorazmernostno konstanto $4\pi/3$. Vstavimo drugo enačbo v prvo in dobimo $g \propto \rho R$ z nedoločeno sorazmernostno konstanto. Težni pospešek na površini krogle je torej sorazmeren z njeno gostoto in radijem. Privzemimo, da je Mesec enako gost kot Zemlja, a ima, kot vemo, 4-krat manjši polmer, zato je njegova gravitacija na površini 4-krat manjša kot Zemljina.

19.11 Gibanje po osončju

Kroženje planetov

Planet se giblje okrog Sonca približno po krožnici z radijem r in obhodnim časom t. Gravitacijska sila Sonca na planet (19.17) je enaka sredotežni sili kroženja (19.11). Izenačitev obeh in upoštevanje $\omega = v^2/r$ ter $v = 2\pi r/t$ pove:

$$\frac{t^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M}\,. \tag{19.19}$$

To je že poznani orbitalni zakon (18.18), dopolnjen z informacijo, kaj se skriva za njim. Pravzaprav bi mu morali odslej reči izrek. Zapisani izrek omogoča, da izračunamo maso Sonca iz izmerjenega obhodnega časa in razdalje kateregakoli krožečega planeta, recimo Zemlje. Povsem isti zakon velja za kroženje Meseca okrog Zemlje. Velja $r_E{}^3/t_E{}^2 = \kappa M_S/4\pi^2$ in $r_M{}^3/t_M{}^2 = \kappa M_E/4\pi^2$. Delimo obe enačbi in dobimo $(r_E{}^3/t_E{}^2)/(r_M{}^3/t_M{}^2) = M_S/M_E$. Gravitacijska konstanta je izpadla. S (slabo) oceno, da je Zemlja oddaljena od Sonca 20-krat toliko kot Mesec [8.12], dobimo, da je masa Sonca vsaj 50-krat tolikšna kot masa Zemlje. Če pa je Sonce oddaljeno 100-krat toliko kot Mesec, je njegova masa skoraj 10^4-krat večja od Zemljine.

Ohranitev energije

Pri gibanju teles v homogenem gravitacijskem polju blizu Zemljine površine se ohranja njihova mehanska energija. Morda velja to tudi za gibanje teles po razsežnem krogelnem gravitacijskem polju Zemlje ali Sonca? Razmislek je podoben kot prej, le integral $\int F_{g\parallel} ds$, s katerim je definirana težna energija, ima obliko $\int \kappa m M\, dr/r^2$. Zato velja:

$$W = -\kappa \frac{mM}{r}\,. \tag{19.20}$$

Težna energija telesa v neskončnosti je enaka nič, sicer pa je negativna in to tem bolj, čim bliže je izvoru. Mehanska energija – vsota kinetične in težne – se ohranja. Če ima telo v gravitacijskem polju pozitivno mehansko energijo, ga bo zapustilo, če ne, bo ostalo vezano.

Ubežna hitrost

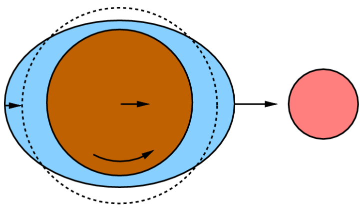
Z Zemlje izstrelimo topovsko kroglo navpično navzgor. Kako hitra mora biti, da zapusti Zemljo in ne pade več nazaj? Dovolj hitra, da se njena hitrost zmanjša na nič šele v neskončnosti. Mehanska energija na začetku in koncu je enaka: $K(R) + W(R) = K(\infty) + W(\infty)$. Oba desna člena sta enaka nič, zato $v = \sqrt{(2\kappa M/R)} = \sqrt{(2Rg)}$. Opazimo, da je ubežna hitrost $\sqrt{2}$-krat večja kot orbitalna hitrost [18.9]. Znaša ~ 11 km/s, kar je 30-krat več kot doseže krogla iz puške. Namesto navpično navzgor lahko streljamo vodoravno proti vzhodu; s tem pridobimo nekaj začetne hitrosti zaradi vrtenja. Na ekvatorju je to $\sim 0{,}5$ km/s.

Povezava med orbitalno hitrostjo pri izbranem radiju in ubežno hitrostjo s tega radija ne velja le za Zemljo kot privlačni center, marveč tudi za Sonce. S tem je določena tudi ubežna hitrost od Sonca za topovsko kroglo, ki jo izstrelimo z Zemlje in torej predtem kroži po Zemljinem tiru z njeno orbitalno hitrostjo. Če streljamo v pravi smeri, pridobimo del začetne hitrosti iz orbitiranja in vrtenja izstrelišča.

19.12 Plimovanje snovi

Plima in oseka

Kamen, ki leži na tleh, privlačijo Zemlja, Mesec, Sonce in vsa druga nebesna telesa. Ker pa jakost gravitacijskih polj hitro pada z oddaljenostjo od izvorov, je vpliv Zemlje močno prevladujoč. Morda je pa kje na Zemlji kakšno telo, ki bi le kazalo gravitacijske vplive od drugod? Spomnimo se morske plime in oseke, ki nastopata vsaka dvakrat dnevno in to s periodo 12,5 ur, kar je natanko polovica trajanja med dvema zaporednima kulminacijama Meseca. Ob ščipu in mlaju je plimovanje še posebej izrazito, ob prvem in zadnjem krajcu pa najšibkejše. Očitno imata tukaj prste vmes Mesec in Sonce, prvi bolj kot drugi.



Slika 19.5 Plima in oseka. Plimo povzroča gravitacijski privlak Meseca in Sonca. Prevladuje vpliv Meseca, ki je sicer manj masiven, a je mnogo bližje.

Razlaga je naslednja. Mesec privlači bližnjo stran Zemlje močneje kot njeno sredino, in oddaljeno stran šibkeje kot sredino, zato povzroči na obeh straneh po en vodni hrib. Medtem ko se Zemlja vrti, vzdržuje Mesec ta dva hriba pod sabo: premika se le oblika hriba, ne pa tudi voda, iz katere je zgrajen. To sta dva plimska vala in vmes sta dve oseki. V izbranem pristanišču bi morala plima nastati ob kulminaciji Meseca, vendar bolj ali manj kasni, odvisno od oblike obale in dna ter od oddaljenih ovir. Ob mlaju in ščipu delujeta Sonce in Mesec z iste oziroma nasprotne strani in plima je še posebej velika. Ob prvem in zadnjem krajcu pa delujeta Sonce in Mesec na Zemljo pod pravim kotom in njuna učinka se medsebojno slabita.

Plimske sile

Kakšna je razlika Mesečevih "plimskih" sil na sprednji in zadnji strani Zemlje? Drugače rečeno: koliko se gravitacijska sila spremeni, če se z razdalje r pomaknemo za kratko razdaljo dr? Gravitacijsko polje Meseca odvajamo po razdalji in dobimo $\mathrm{d}g/\mathrm{d}r = -2\,\kappa\,M/r^3$. Polmer Meseca je 4-krat manjši od polmera Zemlje, zato ima (če je enako gost) $(1/4)^3$ njene mase. Razdalja dr je enaka Zemljinemu polmeru. Preostale količine so znane bolj ali manj natančno. S temi podatki izračunamo $\mathrm{d}g \sim 10^{-7}\,g_0$.

Plimske raztezne sile $\mathrm{d}F = m\mathrm{d}g$ so sorazmerne z maso izvora in padajo s kubom razdalje. Če bi nam bil Mesec bližje, bi Zemljino oceansko plast močneje "raztegoval". Plime bi bile ustrezno večje. Dvakrat bližji Mesec bi izvajal kar osemkrat večje plimske sile in s tem tudi plime!

Kakor povzroča Mesec plimovanje morja na Zemlji, tako bi tudi Zemlja povzročila plimovanje morja na Mesecu, če bi ga tam le kaj bilo. Vendar pa morje niti ni potrebno – plimske sile raztegujejo tudi trdnine. Ker pa so te težko raztegljive, so njihovi premiki ustrezno manjši.

Njihove posledice

Vsi planeti, ki krožijo okoli Sonca, čutijo njegove plimske sile: bližnji bolj, oddaljeni manj. Podobno velja za lune, ki krožijo okoli planetov. To ima zanimive posledice. — Plime ustvarjajo notranje trenje in počasi zavirajo vrtenje okoli lastne osi, vse dokler vrtilni čas ne postane enak orbitalnemu. Zemlja je svoj Mesec že tako zavrla: ni naključje, da nam kaže vedno eno in isto stran. Po drugi strani pa Mesec še ni uspel zavreti Zemlje. Brez dvoma se je Zemlja v preteklosti morala vrteti hitreje in se bo v prihodnosti vrtela počasneje kot danes. Na podoben način je morda tudi Sonce že zavrlo najbližji planet, Merkur. — Plimske sile stiskajo in raztezajo trdnino, jo gnetejo in s tem segrevajo. Morda Jupiter tako močno obdeluje svojo najbližjo luno, da se njena notranjost tali in bruha kot magma skozi razpoke. — Močne plimske sile lahko luno ali planet celo raztrgajo. Skozi daljnogled vidimo, da Saturn obkroža prstan. Morda je to raztrgana luna ali pa prastara drobna snov, ki je lastna gravitacija ne uspe, zaradi nasprotujočih plimskih sil, stisniti v luno. □

20 Deformacije

Vzmeti – Prožnost trdnine – Čvrstost trdnine – Stisljivost tekočine – Viskoznost tekočine – Pretakanje tekočine – Viskozni tok in upor – Tok idealne tekočine – Dinamični upor in vzgon – Površinska napetost

20.1 Vzmeti

Vijačna vzmet

Vijačna vzmet, ki jo uporabljamo za merjenje sil, je *prožna*: ob majhni obremenitvi se raztegne in ob razbremenitvi spet skrči v prvotno obliko. Kot že vemo [19.4], je raztezek vzmeti sorazmeren z obremenitvijo (Hooke):

$$F = ks\,. \tag{20.1}$$

Ko vzmet napnemo, opravimo delo. Pri popuščanju pa vzmet spet odda delo. Ali ga odda ravno toliko, kot ga je prejala? Da, ker je sila vzmeti $F = ks$ pri vsakem raztezku enaka ne glede na to, ali jo napenjamo ali popuščamo. Delo $A = \int F\,\mathrm{d}s$ je torej

$$A = \frac{1}{2}\,k{s_2}^2 - \frac{1}{2}\,k{s_1}^2 = \Delta W\,. \tag{20.2}$$

S tem smo definirali *prožnostno energijo W* napete vzmeti. Prejeto ali oddano delo je enako spremembi te energije.

Polžasta vzmet

Tudi za zasuk polžaste vzmeti velja podobno. Navor vzmeti znaša

$$M = k\varphi\,. \tag{20.3}$$

Sorazmernostno konstanto smo zapisali kar z isto črko kot pri vijačni vzmeti. Delo sile, ki ustvarja navor, torej $A = \int F\,\mathrm{d}s = \int M\,\mathrm{d}\varphi$, je

$$A = \frac{1}{2}\,k{\varphi_2}^2 - \frac{1}{2}\,k{\varphi_1}^2 = \Delta W\,. \tag{20.4}$$

Delo je spet enako spremembi prožnostne energije, le izraz zanjo je drugačen, ker je pač polžasta vzmet drugačna od vijačne.

Vrste energije

Kar smo povedali za vijačno vzmet in polžasto vzmet, velja za vsako telo, dokler so njegove deformacije tako majhne, da se vede kot popolnoma prožno. Delo, ki ga prejme tako telo, je odvisno le od končne deformacije, ne pa tudi od vmesnih sprememb. Zato smemo reči, da je prejeto oziroma oddano delo enako spremembi prožnostne energije.

Tako smo poleg dosedanje kinetične energije, ki jo ima telo zaradi svojega gibanja, in težne energije, ki jo ima zaradi svoje lege, vpeljali še prožnostno energijo, ki jo ima telo zaradi svojega (napetega) stanja. Slednjima dvema rečemo tudi *potencialni energiji*. Vse to so različne vrste energije. V primernih okoliščinah se njihova vsota ohranja.

Strelni lok

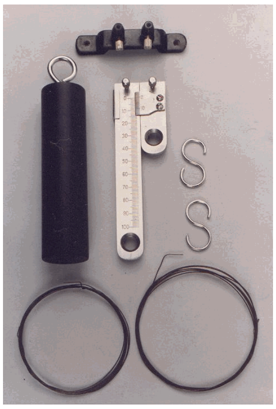
Lovski lok je prožno telo. Ko potegnemo tetivo nazaj, mu povečamo prožnostno energijo za ΔW. Ko nato tetivo spustimo, ta pred seboj potisne puščico in ji poveča kinetično energijo za ΔK. Če zanemarimo razne izgube, se vsota prožnostne in kinetične energije ohranja. To pomeni, da je pri strelu povečanje kinetične energije enako zmanjšanju prožnostne energije. Ocenimo, s kakšno hitrostjo zapusti puščica lok! Postavimo, da je sila loka sorazmerna z nategom. Pri natezni dolžini 0,5 m naj znaša 20 kp. Pri napenjanju potem opravimo delo (20 kp · 0,5 m)/2 = 50 J. Tolikšna je tudi pridobljena prožnostna energija loka in, po strelu, kinetična energija puščice. Masa puščice je 25 g, zato znaša hitrost okrog 60 m/s. Če se v kinetično energijo pretvori le 1/2 · 50 J, dobi puščica hitrost √(1/2) · 60 m/s ≈ 40 m/s.

20.2 Prožnost trdnine

Koliko se vijačna vzmet raztegne pri izbrani obremenitvi, je odvisno od njene dolžine, debeline, števila navojev in snovi, iz katere je narejena. Dve enaki vzmeti iz različnih snovi se različno raztegneta. Očitno so ene snovi bolj raztegljive kot druge. Opišimo to njihovo lastnost s številom!

Natezanje

Najpreprostejša obremenitev trdnine je *natezna obremenitev*. Tanko bakreno žico s presekom S in dolžino l obesimo na strop in jo spodaj obremenimo z utežjo F. Žica se raztegne za podaljšek Δl. Večanje obremenitve pokaže, da je podaljšek sorazmeren s silo.



Slika 20.1 Pribor za merjenje raztega žice. Z leve sponke, pripete na strop, visi pomožna žica z glavno skalo na spodnjem koncu; napeta je s pomožno utežjo. Z desne sponke visi merjena žica s kazalcem v obliki nonijske skale. Deset nonijskih enot ustreza devetim enotam na glavni skali. Merjeno žico obremenimo z raznimi utežmi. Nonij drsi ob glavni skali in omogoča meritve z natančnostjo 0,1 mm. (Global Lab Ware)

Če bi imela žica dvakrat večji presek, bi – domnevamo – za isti raztezek potrebovali dvakrat večjo silo; in če bi bila žica dvakrat daljša, bi se pri isti sili dvakrat bolj raztegnila. Pričakujemo torej, da je relativni raztezek $\Delta l/l$ sorazmeren z *natezno napetostjo* $F_\perp/S$:

$$\frac{F_\perp}{S} = E\,\frac{\Delta l}{l}\,. \tag{20.5}$$

Sorazmernostni koeficient E poimenujemo *prožnostni modul* snovi. Poskusi potrdijo pričakovanje. Bakru izmerimo prožnostni modul $11 \cdot 10^3$ kp/mm^2. To pomeni, da potrebujemo obremenitev 11 kp, če hočemo žico s presekom 1 mm^2 raztegniti za $1/10^3$ lastne dolžine. Manjši prožnostni modul pomeni večji razteg. Najmanjši modul ima kavčuk, okrog 1 kp/mm^2.

Stiskanje

Namesto da raztegujemo tanko žico, lahko stiskamo debel valj ali kvader, in sicer s hidravlično stiskalnico. To je *tlačna obremenitev*. Pričakujemo, da bo za stiskanje veljal isti zakon kot za raztezanje. Poskus – bolj v mislih kot zares – to potrdi.

Striženje

Žico in kvader smo deformirali z dvema nasprotnima silama, ki sta delovali pravokotno na spodnjo in zgornjo ploskev, in sicer natezno ali tlačno. Kaj pa, če bi sili vlekli vzporedno s ploskvama vsaka na svojo stran? To je *strižna obremenitev* telesa. Pričakujemo, da bi se v tem primeru kvader deformiral v paralelepiped z nagibnim kotom α.

Slika 20.2 Priprava za merjenje zasuka žice. Vodoravno žico obremenimo z utežjo preko škripca. Zasuk pokažeta dva kazalca. Je sorazmeren z navorom. (Altec Lab Equipment)

Za poskus je najlažje, da uporabimo tanko cev dolžine l, polmera r in debeline dr. To ni nič drugega kakor tanek kvader $l \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$, zvit v valj. Cev namestimo vodoravno. En konec utrdimo, na drugi konec cevi pritrdimo škripec, ga obremenimo z znanim navorom in merimo zasuk φ. Ta zasuk je povezan z nagibnim kotom paralelepipeda: $\alpha = (r/l)\varphi$. Ugotovimo, da je zasuk sorazmeren s *strižno napetostjo $F_\parallel/S$*, ki prijemlje na obroču cevi:

$$\frac{F_\parallel}{S} = G\alpha\,. \tag{20.6}$$

Sorazmernostni koeficient G poimenujemo *strižni modul*. Za baker izmerimo $5 \cdot 10^3$ kp/mm^2. Bakrena cev, dolga 1 m, premera 1 cm in debeline 1 mm, na katero je nataknjen škripec premera 10 cm, obremenjen z utežjo 5 kp, se torej zasuka za kot 3,6 stopinje. Strižni modul je istega reda velikosti kot prožnostni modul. Nasploh so pri trdninah prožnostni moduli 2 do 3-krat večji od strižnih.

20.3 Čvrstost trdnine

Meja prožnosti

Sorazmernost med raztegom in obremenitvijo velja le za majhne obremenitve. Če te presežejo določeno mejo, razteg ni več linearen, vendar se žica po razbremenitvi še vedno vrne v začetno stanje. Ko obremenitev še naprej večamo, ostaja žica po razbremenitvi bolj ali manj raztegnjena: presežena je bila njena *meja prožnosti*. Za baker znaša 10 kp/mm^2. Še večje obremenitve pa prej ali slej žico pretrgajo; presegle so *mejo natezne trdnosti*. Pri bakru je ta 2 do 5-krat večja od meje prožnosti. Nekatere snovi, recimo steklo, se pretrgajo, preden dosežejo mejo prožnosti.

Upogib in lom

Lesena palica, ki jo upogibamo, se uvija, dokler ne poči. Na zunanji, izbočeni strani deluje nanjo natezna obremenitev in na notranji tlačna. Palica zmeraj poči na zunanji strani: meja natezne trdnosti lesa je manjša kot meja njegove tlačne trdnosti. Preden poči, se sveža palica upogne mnogo bolj kot suha. Rečemo da je prva bolj *žilava* in druga bolj *krhka*. Kovine so žilave in kamnine so krhke.

Teža in trdnost

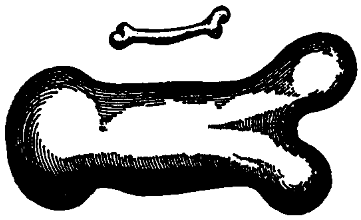
Z mejami trdnosti – natezne, tlačne ali strižne – je podana *čvrstost snovi*. Zanimajo nas zlasti tlačne in natezne trdnosti gradbenih snovi. Za apnenec izmerimo visoko tlačno trdnost 5 kp/mm^2 in kar 8-krat nižjo natezno trdnost. Apnenčast kvader, podprt na vsakem koncu, se zaradi svoje teže v sredini upogiba navzdol. Pri tem se na spodnji strani razteza in na zgornji stiska. Če je kvader dovolj dolg in težek, na spodnji strani poči. To so vedeli že stari graditelji templjev, ko so polagali prečne kamnite bloke na pokončne stebre: postavljati so jih morali zelo na gosto. Kasneje so se gradbeniki naučili, da namesto ravnega prečnega kvadra namestijo lok iz stikajočih se prisekanih kamnov in tako natezno obremenitev spremenijo v tlačno. Takšne zgradbe – templji in mostovi – so mnogo trdnejše in razdalje med stebri so lahko večje.

Slika 20.3 Gradbeni lok, sestavljen iz prisekanih kamnov. Prenese mnogo večje obremenitve kot raven, na obeh straneh podprt kamnit tram. Prikazani so loki na rimskem vodovodu. (Anon)

Težnost in bitja

Prostornine dreves enake oblike so sorazmerne s kubi njihovih višin l. Ker je specifična teža lesa v vseh drevesih približno enaka, velja sorazmernost tudi za njihove teže: $F_g \propto l^3$. Ploščine debelnih presekov so sorazmerne s kvadrati višin: $S \propto l^2$. Razmerje $F_g/S \propto l$, torej tlak, očitno narašča z velikostjo drevesa. (Dvakrat višje drevo ima štirikrat večji presek in osemkrat večjo težo. Na enoto preseka zato pritiska dvakrat večja sila.) Prej ali slej preseže tlačno trdnost lesa in drevo se zruši pod lastno težo. Ali pa se pod vetrom upogne, preseže natezno trdnost in zlomi. V naravi zato ni dreves, ki bi presegla 120 m višine. Od dveh enako težkih dreves je tisto, ki ima večji presek, manj tlačno obremenjeno. Velika drevesa morajo zato biti čokata, majhna pa so lahko vitka.

Tudi živali so podložne istim zakonom. Njihove nožne kosti so obremenjene s težo teles. Očitno morajo biti kosti dovolj čvrste. Zato morajo imeti velike živali bolj čokate kosti kot majhne živali. Antilopa z velikostjo slona bi si polomila vse noge.



Slika 20.4 Stegnenica majhne in velike živali. Prva je mnogo bolj vitka kot druga. (Galilei, 1638)

S trdnostjo kosti in težnostjo je omejena tudi velikost živali. Na kopnem je ta meja dosežena s slonom. V vodi, kjer vzgon zmanjšuje težo, so živali lahko precej večje; takšni so kiti. Če kita naplavi na obalo, ga lastna teža tako stisne, da zaradi težav z dihanjem pogine.

20.4 Stisljivost tekočine

Stiskanje vode

Tekočin ne moremo stiskati enostransko, ampak to delamo z vseh strani. V steklenico, opremljeno z zamaškom in cevko, nalijemo vodo ter jo postavimo v hidravlično stiskalnico, napolnjeno z oljem. Stiskalnica je opremljena z manometrom in ima debelo stekleno okence, da lahko gledamo vanjo. Že pri majhnih tlakih 1–2 kp/cm^2 opazimo, da se gladina vode v cevki zniža. Voda se torej pod tlakom skrči. Velja

$$\Delta p = K \frac{\Delta V}{V} . \tag{20.7}$$

Sorazmernostni koeficient K poimenujemo *modul stisljivosti*. Rahlo je odvisen od tlaka. Za vodo izmerimo $20 \cdot 10^3$ kp/cm^2 pri nizkih tlakih; z večanjem tlaka se ta vrednost počasi povečuje. Prostorninsko skrčenje je zelo majhno: za relativno skrčenje za 1 % je potreben pritisk kar 200 kp/cm^2! Toliko je torej voda stisnjena na globini 2 km pod morsko gladino. V večini primerov lahko njeno stisljivost zato zanemarimo.

Stiskanje zraka

Tudi zrak je tekočina, le da nima gladine. Izkušnje s tlačilkami nam povedo, da je zrak – v nasprotju z vodo – zelo stisljiv. Kako stisljiv?

Slika 20.5 Stiskanje zraka. V desni krak nalivamo živo srebro in s tem večamo pritisk na ujeti zrak v levem kraku. Prostornina ujetega zraka se zmanjšuje in je obratno sorazmerna s pritiskom. (Larive, 1895)

Domislimo se naslednjega poskusa. Stekleno cevko ukrivimo v obliko J in zapremo krajši krak. Potem v drugi krak vlijemo toliko živega srebra, da ostane zrak v kratkem kraku ujet. Pod kakšnim pritiskom je, pove razlika obeh živosrebrnih stolpcev. Z nadaljnim dolivanjem živega strebra čedalje bolj stiskamo zrak in ob tem merimo njegovo prostornino in pritisk. Vsakokrat počakamo, da se razmere v krakih umirijo. Odkrijemo, da velja obratna sorazmernost

$$pV = p_0 V_0 \,. \tag{20.8}$$

To je *plinski stisljivostni zakon* (BOYLE). Če se pritisk dvakrat poveča, se prostornina dvakrat zmanjša. To je vse kaj drugega kot pri vodi. Ko odprto steklenico z zrakom, z grlom navzdol, potopimo v morje, je že pri 10 metrih globine zrak v njej stisnjen v zgornjo polovico prostornine. Če bi steklenico spustili na globino 1 km, bi bil tam zrak stisnjen že na 1 % svoje začetne prostornine. Tako se kitu stiska zrak v pljučih, ko se potaplja! Za zrak pod kakršnimkoli tlakom lahko rečemo, da je podoben stisnjeni vzmeti.

Stiskanje drugih plinov

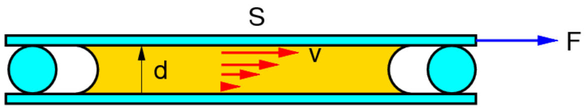
Stiskanje ponovimo tudi z drugimi plini, ki jih že poznamo, recimo s kisikom ali vodikom. Prav tako merimo pline pri nižjih tlakih od zračnega: srednji del cevke moramo le nadomestiti z gumijasto cevjo in odprti kos cevke znižati. Vsakokrat dobimo isto odvisnost – obratno sorazmernost. Le pri visokih tlakih nad $100\,\mathrm{kp/cm^2}$ se začnejo pojavljati odstopanja – stiskanje ni več tako veliko, kot bi "moralo" biti.

Kakšen je modul stisljivosti za pline? Logaritmiranje in diferenciranja stisljivostnega zakona (20.8) pove $\mathrm{d}p/p + \mathrm{d}V/V = 0$, torej $\mathrm{d}p = -p\mathrm{d}V/V$. Primerjava z enačbo (20.7) pa izda $K = p$. Čim večji je tlak, tem težje je dodatno stiskati plin.

20.5 Viskoznost tekočine

Viskoznost

Poleg tlačni obremenitvi lahko tekočine izpostavimo tudi strižni obremenitvi. Na vodoravno stekleno ploščo natočimo plast medu in ga pokrijemo z drugo ploščo, ki drsi na jeklenih kroglicah. Zgornjo ploščo povlečemo s padajočo utežjo. Plošča se začne gibati in doseže neko stalno hitrost. Med torej ni prožen glede na strižno obremenitev, ampak je *viskozen*. To je tudi glavna razlika med trdnino in tekočino in razlog za njuno različno poimenovanje. V medu raztroseni kristalčki sladkorja nadalje pokažejo, da plast medu ob vsaki plošči miruje, vmesne plasti pa drsijo druga ob drugi. Če je razmik med ploščama majhen, je profil hitrosti med njima linearen. Tudi druge tekočine bolj ali manj rade tečejo; rečemo, da so manj ali bolj viskozne.



Slika 20.6 Viskoznost – notranje trenje v tekočinah. Plasti tekočine, ki drsijo druga ob drugi z različnimi hitrostmi, se med seboj tarejo. Za vzdrževanje gibanja je potrebna zunanja sila. Hitrost je sorazmerna tej sili.

Modul viskoznosti

Kako bi viskoznost opisali s številom? Gibanje zgornje plošče se ne spremeni, če si jo mislimo razrezano na pol in vsako polovico obremenjeno s polovično silo. Prirast hitrosti na debelinsko enoto se pa tudi ne bi spremenil, če bi se zgornja plošča pomikala s polovično hitrostjo na polovični debelini. Pričakujemo torej sorazmernost med hitrostnim gradientom $\Delta v/l$ in strižno napetostjo $F_\parallel/S$. Poskus to potrdi:

$$\frac{F_\parallel}{S} = \eta\,\frac{\Delta v}{l}\,. \tag{20.9}$$

Sorazmernostni koeficient poimenujemo *modul viskoznosti* ali kar viskoznost η. Za med izmerimo $10\,\mathrm{Ns/m^2}$. To pomeni, da je potrebna sila $10\,\mathrm{N}$ na zgornjo ploskev $1\,\mathrm{m^2}$, če hočemo, da se ta giblje s hitrostjo $1\,\mathrm{cm/s}$ na razdalji $1\,\mathrm{cm}$ od spodnje plošče.

Viskozimeter

Merjenje viskoznosti z vzporednima ploščama je nerodno in le malo natančno. Bolje je, če namesto njiju vzamemo dva cilindra, enega znotraj drugega, ločena s tanko vmesno špranjo. Preko njunega vrtenja izmerimo viskoznost vode, $1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Ns/m^2}$, in olja, 80-krat toliko. Viskoznost raztaljenih kovin, recimo svinca, je istega reda velikosti kot pri vodi. Viskoznost zraka je pa premajhna, da bi jo tako merili. Počakati bomo morali, da bomo ugotovili takšne posledice viskoznosti na pretakanje tekočin – torej enačbe, vsebujoče viskoznost –, ki nam bodo to omogočile.

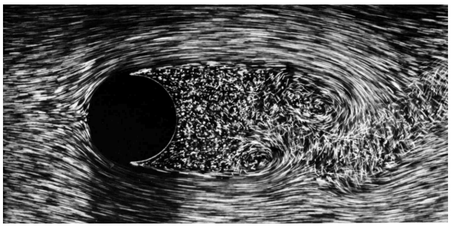
20.6 Pretakanje tekočine

Tokovnice

Vetrovi pihajo nad tlemi, reke tečejo po strugah in pitna voda po vodovodnih ceveh: tekočine in plini se pretakajo. Kakšno je to pretakanje, pokažejo razne nečistoče, ki jih tokovi nosijo s sabo: listje v zraku, odlomljene vejice na rečni gladini ter žagovina, ki jo natrosimo v vodni tok in jo opazujemo skozi prozorne steklene cevi. Rečemo, da so to tokovni indikatorji. Indikator kaže, kako se giblje tekočina v njegovi okolici. V kratkem časovnem intervalu zariše vsak indikator kratek premik. Množica premikov od vseh indikatorjev ob istem času kaže trenutno sliko toka. Kar sili nas, da zaporedne premike povežemo v črte *tokovnice*. Tokovnica kaže, kako se – ob istem času – premikajo delci tekočine na njej, namreč v smeri lokalnih tangent. Tokovnice se nikjer ne sekajo, kajti to bi pomenilo, da ima tamkajšnji delec dve različni hitrosti hkrati, kar pa ni mogoče.

Dve vrsti tokov

Ko preučujemo tokovnice v različnih tokovih, ugotovimo, da jih lahko razdelimo v dve skupini. Ene so takšne kot lepo počesani lasje: tako teče olje iz steklenice in voda v mirni, tihi reki. Rekli bomo, da je to *laminarno* gibanje. Druge tokovnice so pa takšne kot skuštrani lasje: pojavljajo se v zvrtinčeni vodi okrog skal v brzicah in v vseh zračnih vetrovih, najsibo šibkih ali močnih. To je *turbulentno* gibanje. Polje tokovnic se s časom praviloma spreminja. Kadar se ne, pa rečemo, da je *stacionarno*. Samo laminarno gibanje je lahko stacionarno, turbulentno gibanje je vedno nestacionarno.



Slika 20.7 Tok vode okrog valja. Valj je postavljen navpično in sega nad vodno gladino. Gibanje gladine je vidno zaradi sledi vbrizganih zračnih mehurčkov. Tok pred valjem je laminaren in za njim turbulenten. Če je valj majhen, hitrost majhna in viskoznost velika, je tok povsod laminaren. (Dyke, 1982)

Turbulentni količnik

Kaj vpliva na to, kakšne bodo tokovnice? Iz povedanega se zdi, da je kriva predvsem viskoznost, ki duši turbulenco, vplivajo pa tudi gostota, hitrost in razsežnost toka. Morda je za gibanje tekočinskega elementa pomembno, kakšno je razmerje med delom pospeševanja in delom trenja? Prvega ocenimo s kinetično energijo elementa $\rho V v^2/2$ in drugega z viskozno silo (20.9) preko njegove dolžine $\eta S(v/l)\cdot l$. Upoštevamo, da je prostornina elementa sorazmerna z l^3 in površina z l^2, pa dobimo

$$R = \frac{lv\rho}{\eta}\,. \tag{20.10}$$

To je *turbulentni količnik* (Reynolds). Majhne vrednosti tega količnika oznanjajo laminarno gibanje in velike vrednosti turbulentno gibanje. Kakšne so konkretne številčne vrednosti, pa je odvisno od konkretne oblike toka. Z opazovanjem toka vode po okrogli cevi ugotovimo, da tok ne more biti turbulenten, če $R < 2000$. Pri večjem tokovnem količniku pa se gibanje rado sprevrže v turbulentno.

Jakost toka

Koliko snovi se pretoči v časovni enoti skozi celotni presek toka, povemo z *masnim tokom* Φ_m ali s *prostorninskim tokom* Φ_V:

$$\Phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \qquad (20.11)$$
$$\Phi_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$
$$\Phi_m = \rho\Phi_V .$$

S prostorninskim tokom je definirana tudi *povprečna hitrost* toka: $\Phi_V = S\bar{v}$.

20.7 Viskozni tok in upor

Tok po cevi

Ko teče voda laminarno po vodoravni cevi polmera r in dolžine l, čuti viskozni upor $F \propto \eta \cdot 2\pi rl \cdot \bar{v}/r$. Ta upor premaguje tlačna razlika med koncema cevi $F = \Delta p \cdot \pi r^2$. Povprečno hitrost izrazimo s prostorninskim pretokom $\bar{v} = \Phi_V/\pi r^2$ in dobimo $\Phi_V \propto (r^4/\eta)(\Delta p/l)$. Sorazmernostni koeficient določimo eksperimentalno, z neposrednim merjenjem pretoka:

$$\Phi_V = c \cdot \frac{r^4}{\eta}\frac{\Delta p}{l}\,, \quad c = 0{,}39 \approx \pi/8\,. \qquad (20.12)$$

To je *zakon o laminarnem pretoku*. Pretok je močno odvisen od premera cevi: le majhno povečanje premera zelo poveča pretok. To se dogaja, na primer, s krvnimi žilami, ko telovadimo.

Tok okrog krogle

Kroglica, ki laminarno pada skozi vodo, čuti viskozni upor $F \propto \eta \cdot 4\pi r^2 \cdot v/r$, torej $F \propto \eta rv$. Temu uporu nasprotuje sila teže, zmanjšana za vzgon. Sorazmernostni koeficient določimo eksperimentalno, z neposredno meritvijo sile:

$$F = c \cdot \eta rv\,, \quad c = 19 \approx 6\pi\,. \qquad (20.13)$$

To je *linearni zakon upora*. Poskusi kažejo, da velja za $R < 0{,}1$. Zakon velja tudi za telesa, ki niso kroglasta, le sorazmernostni koeficient je zanje drugačen.

Kapilarni in kroglični viskozimeter

Z enačbama za pretok in upor lahko udobno določamo viskoznosti tekočin: skoznje spuščamo kroglico preko izbrane razdalje in merimo hitrost padanja; ali pa z znanim pritiskom (recimo z živosrebrnim stolpcem) poganjamo izbrano prostornino tekočine po kapilari in merimo potrebni čas. S kapilarno metodo določimo viskoznost zraka $18 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ns/m^2}$. To je za dva reda velikosti manj od vode. Račun pove, da oblačne kapljice s premerom pod 0,1 mm – take, ki jih komaj še vidimo – padajo skozi zrak s hitrostjo 0,3 m/s. Turbulentni količnik je pri tem reda velikosti

10^{-5}, zato je linearni zakon upora veljaven in gibanje je zagotovo laminarno. Zdaj vemo, zakaj nam oblaki ne zgrmijo na glavo.

Viskoznost in bitja

Teža enako oblikovanih živali je sorazmerna s kubom njihovih dolžin: $F_g \propto l^3$. Pri gibanju skozi zrak ali vodo čuti žival viskozni upor $F_v \propto l$. Razmerje teh dveh sil znaša $F_g/F_v \propto l^2$. Pri velikih živalih, recimo pri ljudeh, je vpliv viskoznosti zanemarljiv z vplivi težnosti. Pri majhnih živalih, recimo pri raznem morskem planktonu (z velikostjo med 10^{-3} do 1 milimetra), ki ga vidimo pod mikroskopom, pa je ravno obratno: zanje je težnost nepomembna. Njihov svet je svet viskoznosti.

Človek, ki plava po morju, se poganja naprej z zamahi rok in nog. Ko odrine vodo nazaj s silo F, deluje voda nanj z nasprotno enako silo naprej. Ribe počno to z zamahi repa in plavuti. Po končanem zamahu drsi veliko telo še nekaj časa naprej. Ima pač precejšnjo maso in s tem kinetično energijo. Potrebna je dolga pot, da delo viskozne sile zmanjša hitrost na nič. Drobno bitje, ki se požene naprej z nožicami, bičkom ali migetalkami, pa se takoj ustavi. Tako je, kot da bi mi plavali v morju medu.

Slika 20.8 Regratovo seme. Tanke nitke, ki tvorijo padalo, imajo veliko površino in majhno prostornino. Zaradi viskoznega upora padajo skozi zrak zelo počasi. (Anon)

Človeka, ki skoči v globino, pospešuje teža in zavira upor zraka. Slednji narašča s hitrostjo. Dokler je hitrost majhna, je upor zanemarljiv v primerjavi s težo in padanje je enakomerno pospešeno. Pri padcu z višine 10 m tako človek pridobi hitrost 14 m/s, kar je dovolj, da se na trdih tleh polomi do smrti. Drugače je pri regratovih semenih v zraku. Viskozni upor postane enako velik teži že pri zelo majhni hitrosti padanja. Tedaj postane padanje enakomerno. Semena plavajo po zraku in tokovi jih nosijo, kamor hočejo. Tudi mravlja doseže končno hitrost padanja komaj 1 m/s. Ni se ji treba bati padcev.

20.8 Tok idealne tekočine

Pri velikih vrednostih tokovnega količnika je viskozna sila zanemarljiva v primerjavi s tlačnimi silami, ki tekočino poganjajo. Če so tudi spremembe gostote zanemarljive, bomo rekli, da imamo opravka z *idealno tekočino*. Idealna tekočina ima, po definiciji, viskoznost nič in je nestisljiva. V mnogih primerih je to dober približek za gibanje vode in zraka.

Batna brizgalka

Cilinder z ozko izhodno šobo na eni strani in z batom na drugi strani napolnimo z vodo. To je batna brizgalka: ko potisnemo bat navznoter, iz šobe brizga voda. Naj ima cilinder prostornino V, bat pa potiskajmo s tlakom, ki je za Δp večji od zračnega tlaka. Ko potisnemo bat do konca, opravimo delo ΔpV. To delo je prejela masa m vode, ki je iztekla s hitrostjo v. Ker pri idealni vodi ni trenja in je nestisljiva, je dovedeno delo enako spremembi njene kinetične energije, to je, tlačna razlika je enaka spremembi *gostote kinetične energije*: $\Delta p = \rho v^2/2$. Posebne vrste brizgalka so kar naša usta, ko skozi šobo pihamo zrak. S pljuči ustvarimo nadtlak okrog 0,1 bara, kar pomeni, da izpihujemo zrak s presenetljivo hitrostjo okrog 130 m/s.

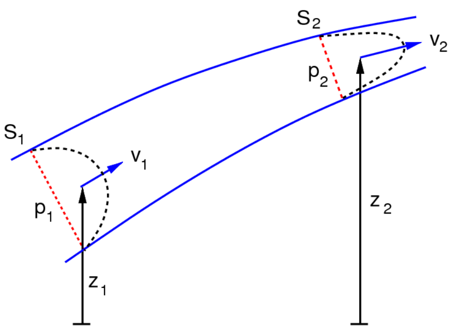
Iztekanje iz posode

Namesto da potiskamo vodo iz posode z batom, jo lahko potiska kar njena lastna teža. V posodo, ki ima iztočno šobo skozi steno, nalijemo vodo do višine h nad njo. Na globini šobe vlada znotraj posode za $\Delta p = \rho gh$ večji tlak kot zunaj. Ta razlika tlakov potisne vodo po šobi in ji podeli ustrezno gostoto kinetične energije, to je, voda pridobi hitrost $v^2/2 = gh$.

Hitrost iztekajočega elementa vode je torej prav takšna, kot da bi prosto padel z gladine. Če šobo obrnemo navzgor, bi moral curek doseči gladino vode, vendar mu to ne uspe povsem. Nekaj dela se je pač potrošilo drugod kot za povečanje kinetične energije. Napovedano hitrost iztekanja lahko tudi preverimo z merjenjem. Najlažje je, če merimo prostornino iztekle vode v izbranem času ter jo delimo s presekom šobe. Ugotovimo, da je izmerjena hitrost za okrog 5–10 % manjša od izračunane. To je cena, ki jo plačamo zaradi računske predpostavke o idealnosti tekočine.

Tok v tokovni niti

Pri iztekanju vode iz posode potuje vsak del vode vzdolž ozkega svežnja tokovnic – *tokovne niti*. Ko se del vode spušča, mu notranji tlak narašča in se mu težna energija zmanjšuje, in ko se pospešuje v šobo, mu notranji tlak upada in se mu kinetična energija povečuje. Pričakujemo, da velja to za stacionarno gibanje tekočine v poljubni tokovni niti sredi kakršnegakoli toka. Kako to dokazati?



Slika 20.9 Tokovna nit. V nestisljivi in neviskozni tekočini se vzdolž toka ohranja vsota tlaka, gostote kinetične in gostote težne energije.

Tekočino v tokovni niti med presekoma S_1 in S_2 v mislih pobarvajmo. V kratkem času se pobarvani kos premakne naprej. Spredaj odteče prostornina S_2v_2 in zadaj doteče S_1v_1; prostornini sta enaki, V, in imata enako maso, m. Zaradi tlaka spredaj in zadaj prejme pobarvana tekočina delo $(p_1 - p_2)V$. Kinetična energija se ji spremeni za $mv_2{}^2/2 - mv_1{}^2/2$ in težna za

$mgh_2 - mgh_1$. Dovedeno delo je enako spremembi energije, kar pomeni, da je vzdolž (ne predolgega kosa) tokovne niti

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}\,. \tag{20.14}$$

To je *tokovna enačba* (D. BERNOULLI), ki je pravzaprav izrek o ohranitvi kinetične in težne energije. Privzeli smo, da sosednja tekočina deluje na pobarvano tokovno nit pravokotno, kakor da bi obe med seboj mirovali. Okolica potem ne opravlja nobenega dela. Kar velja za tokovno nit, velja tudi za širok snop niti, recimo za stacionarni tok po cevi s spremenljivim presekom. Računati moramo le s povprečnimi hitrostmi. Povedano velja celo za turbulentno gibanje, če je le tok stalen; seveda moramo pri tem zanemariti majhne spremembe tlaka in kinetične energije, ki so povezane z vrtinci.

Tok skozi ožino

Če ima vodoravna cev, po kateri teče voda, ožino, se tam hitrost poveča, saj se voda nikjer ne kopiči, to je, njen prostorninski tok je stalen. Tokovna enačba pove, da je zato v tej ožini tlak znižan. Kako bi ga izmerili? Najbolje tako, da bi po toku spustili majhen plavajoč manometer. Ker pa to ne gre, v cev na vrhnji strani izvrtamo luknjice in vanje vstavimo navpične cevke – tekočinske manometre. Pazimo, da cevke ne segajo preko stene v cev, ker bi s tem popačili tokovnice. Višina vode v manometrih kaže, kakšen je tamkajšnji tlak. Res je v ožini manjši kot na obeh straneh.

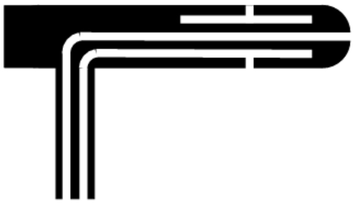
Slika 20.10 Ožinski tokomer za zrak. Pretok zraka skozi cev je enolično določen s tlačno razliko med njenim širokim in ozkim delom. S tem sta določeni tudi povprečni hitrosti na obeh mestih. (HyperPhysics)

Povezavo med pritiskom in hitrostjo uporabimo za merjenje pretoka tekočine po cevi z ožino. Pred ožino in v njej priključimo primeren manometer. Hitrosti na obeh mestih sta povezani s tamkajšnjima presekoma: $v_1 = \Phi_V / S_1$ in $v_2 = \Phi_V / S_2$. Vstavitev v tokovno enačbo (20.14) pove, kako je iskani pretok odvisen od izmerjene tlačne razlike. Z najdenim pretokom pa so določene tudi hitrosti v obeh presekih. To je *ožinski tokomer*.

20.9 Dinamični upor in vzgon

Zastojni tlak

Pri pravokotnem vpadu na oviro se tokovnica konča in na tem mestu povzroči dodatni *zastojni tlak* $\Delta p = \rho v^2/2$. Vseeno je, ali se giblje tekočina in ovira miruje, ali pa tekočina miruje in se giblje ovira. Reka, na primer, teče okrog mostnega stebra in ladja pluje po morju. Na prednji strani stebra in na kljunu ladje nastaja zastojni tlak. Če ga uspemo izmeriti, s tem določimo relativno hitrost gibanja ovire in toka. Zastojni tlak v toku tekočine merimo z valjem z zaobljenim prednjim delom. Valj ima luknjo v zastojni točki in drugo na plašču. Luknji sta povezani s krakoma manometra. To je *zastojni tokomer*. Z njim udobno merimo hitrosti brez merjenja poti in časov.



Slika 20.11 Zastojni tokomer. Hitrost tekočine je enolično določena z razliko med čelnim in bočnim tlakom. Razliko tlakov merimo s priključenim manometrom.

Dinamični upor

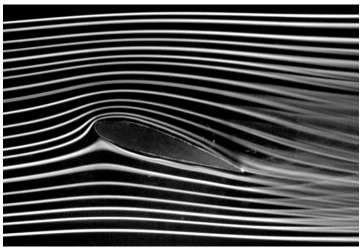
Okrogla plošča s ploščino S čuti zaradi zastojnega tlaka upor $F \propto \Delta p\,\mathrm{S}$. Ne smemo pričakovati, da bo sorazmernostni koeficient natanko 1, ampak ga bomo morali določiti eksperimentalno. Pričakujemo pa, da bo tovrsten *dinamični upor* veljal tudi za drugače oblikovana telesa z enakim presekom, le sorazmernostni koeficient zanje bo drugačen:

$$F = \frac{1}{2}\, c\rho S v^2\,. \tag{20.15}$$

To je *kvadratni zakon upora*. Meritve sile s tehtnico pokažejo, da drži in da ima koeficient c za ravno ploščo vrednost 1,1, za kroglo 0,4 in za ribjo obliko 0,04. Čim manj zastaja voda za oviro, to je, čim manj vrtincev nastaja za njo, tem manjši je upor. Poskusi tudi pokažejo, da velja zakon za kroglo pri tokovnih količnikih $R > 1000$. Tako padajo dežne kaplje ob ravnovesju teže in dinamičnega upora. Kaplja s premerom 5 mm, na primer, pada s hitrostjo 6 m/s.

Dinamični vzgon

Dinamični upor deluje na telo v smeri gibanja tekočine. To je zato, ker je telo simetrične oblike in simetrično postavljeno. Če pa recimo okroglo ploščo nagnemo proti vetru, deluje nanjo sila poševno navzgor. To silo razstavimo v dve komponenti: vodoravno in navpično. Prvo še naprej imenujemo upor, drugi pa rečemo *dinamični vzgon*. Na vrvico privezana poševna plošča se v vetru dvigne v višave: tako otroci spuščajo zmaje. Naprej ga vlečejo s silo, ki uravnoveša upor, dinamični vzgon pa tišči zmaja navzgor in drži ravnovesje njegovi teži.



Slika 20.12 Nesimetrični tok zraka okoli podolgovate ovire. Tokovnice so označene z dimom. Upor deluje poševno nazaj in navzgor. Sestavljen je iz dveh komponent, vzdolžne in navpične. Slednja oviro dviguje. Tako v vetru lebdijo privezani zmaji in jadrajo ptice. (University of Cambridge)

Ptice na podoben način uravnavajo lego peruti in jadrajo po zraku. Njihove peruti so oblikovane tako, da je upor čim manjši, vzgon pa čim večji. In jadrnice postavljajo svoja jadra pod kotom glede na veter ter jadrajo poševno proti njemu.

20.10 Površinska napetost

Tanek curek vode, ki izteka iz pipe, se spodaj razdrobi v kapljice. Ko polijemo vodo po zamaščeni stekleni plošči, se na njej oblikujejo majhne kaplje in večje mlakuže. In tudi dež, ki pada iz oblakov, ni nič drugega kot množica kapljic. Zdi se, kot da bi majhne količine vode ne mogle obstajati drugače kot v obliki kapljic – kot da bi bila površina vode nekakšna opna, ki drži vodo skupaj.

Napetost gladine

Poglejmo, če je to res. V vodo potopimo obroč iz tanke žice in ga obesimo na vzmetno tehtnico. Ta kaže njegovo težo, zmanjšano za vzgon. Potem nižamo posodo z vodo, dokler obroč ne predre gladine. Tedaj za sabo potegne cilinder vode in tehtnica pokaže povečano silo. Sila je neodvisna od dolžine in debeline cilindra, je pa sorazmerna z njegovim obsegom. Gladina torej deluje na svoj rob dolžine l s pravokotno silo

$$\frac{F}{l} = \gamma\,. \tag{20.16}$$

Poimenujemo jo *površinska napetost*. Poskus z obročem pove, za vodo, $\gamma = 7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/m}$.

Ukrivljenost gladine

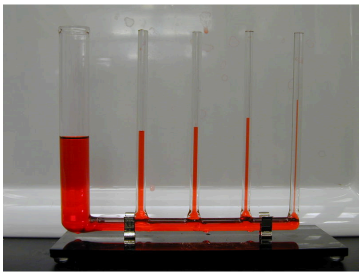
Zaradi površinske napetosti, ki stiska vodno kapljico, mora biti v njej večji tlak kot zunaj. Na površini si mislimo majhen kvadrat z dolžino stranice l. Iz središča r vidimo (rahlo zakrivljeno) stranico pod kotom φ. Na vsako stranico deluje površinska napetost s silo γl. Sili na dveh nasprotnih stranicah se razlikujeta po smeri za kot φ in imata delno rezultanto $\gamma l \varphi$, vse štiri sile pa dvakrat toliko. Ta rezultanta mora biti nasprotno enaka pritisku na kvadrat, $\Delta p l^2$. Z upoštevanjem $l/r = \varphi$ dobimo

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r}\,. \tag{20.17}$$

Čim manjša je kapljica, tem večji je tlak. V oblačni kapljici s premerom 0,1 mm je tlak za 30 milibarov večji kot zunaj.

Kapilarnost

Gladina ni ukrivljena samo pri kapljici, ampak tudi takrat, ko je voda nalita v posodi: ob steni je gladina zavihana navzgor. Če v vodo vtaknemo tanko navpično cevko, se gladina v njej oblikuje v vbočen disk in se nekoliko dvigne. V cevki s premerom 1 mm, na primer, se dvigne za 3 cm. Rečemo, da je to *kapilarni dvig*. Kako si ga razložimo?



Slika 20.13 Kapilare. Tanke cevke, po katerih se dviga voda zaradi površinske napetosti. Tanjša ko je cevka, više se dvigne voda. (MIT – Massachusetts Institute of Technology)

Na gladini vode v posodi je tlak enak zračnemu. Prav tak je tlak znotraj cevke na isti višini. Tik pod gladino v cevki pa je tlak za $\rho g h$ manjši od zračnega tlaka tik nad njo. Prav tolikšna mora biti dodatna površinska napetost navzgor. Površinska napetost med robom gladine in steno torej vleče vodo navzgor. Čisto cevko voda povsem omoči in gladina v njej zavzame obliko polkrogle. Tedaj velja $\rho g h = 2\gamma/r$. Enačba je uporabna za merjenje površinske napetosti. Različne tekočine imajo seveda različne površinske napetosti. Zlasti je zanimivo živo srebro, ki v kapilari dela izbočen disk in se v njej spušča, ne dviguje. To je zato, ker ne omaka sten.

Mastna jeklena igla, ki jo previdno položimo na vodno gladino, plava. Voda namreč igle ne omoči, gladina se pod njo ukrivi ter s površinske napetostjo uravnovesi obremenitev. To izkoriščajo nekatere žuželke, da hodijo po vodi. Za njih je pač površinska napetost vode zadosti velika. Večje živali so za kaj takega pretežke. □

21 Valovanje

Val na vrvi – Valovanje na struni – Gladinski valovi – Fronte in žarki – Odboj – Lom – Uklon – Zvočni valovi – Merjenje zvoka – Glas in sluh – Glasbila in glasba – Frekvenčni zamik – Valovno čelo – Energija

21.1 Val na vrvi

Vrv in val

Vihtenje vrvi pokaže, da se ta zvija v valovih. Za bolj nadzorovano preučevanje položimo vrv na gladka tla. Z enim koncem naj bo pritrjena na steno in na drugem koncu prosto gibljiva. Tam jo primemo z roko in hitro trznemo desno-levo. Na vrvi se pojavi prečni "hrib", ki potuje proti steni z enakomerno hitrostjo c in pri tem ohranja svojo obliko. Rečemo, da je to *val*. Njegova oblika je odvisna od tega, kako smo zamahnili z roko, njegova hitrost pa od lastnosti in napetosti vrvi. Ob času $t = 0$ naj ima val obliko $s = f(x)$; ob kasnejšem času t je odmik vala pri razdalji x enak, kot je bil odmik vala pri razdalji $x - ct$. Gibanje vala torej opišemo z enačbo

$$s(x,t) = f(x - ct)\,. \tag{21.1}$$

Hitrost vala

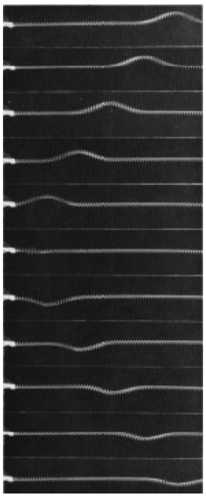
Naj se val giblje v desno s hitrostjo c glede na tla. Mislimo si, da se z vozičkom peljemo vštric njega. Potem val glede na nas stoji pri miru, skozenj – po njegovem obrisu – pa teče vrv v levo s hitrostjo c. Opazujmo izbrani kos vrvi dolžine dl in mase μdl, pri čemer μ označuje maso vrvi na dolžinsko enoto. Ob izbranem času se giblje opazovani kos vrvi po delu vala, ki ima krivinski radij R. Kako je radij velik, je odvisno pač od tega, koliko je val ukrivljen na tistem mestu. Kos vrvi torej za kratek čas kroži. Iz središča kroženja ga vidimo pod kotom $d\varphi = dl/R$. Nanj mora zato delovati centripetalna sila $\mu dl c^2/R$. Od kod pride ta sila? Na sprednjem in zadnjem koncu kosa vrvi vleče vsaka v svojo stran sila F, s katero je vrv napeta. Smeri teh sil ležita pod kotom dφ in njuna rezultanta znaša $F d\varphi$. Izenačitev centripetalne sile s to rezultanto pove:

$$c^2 = \frac{F}{\mu}\,. \tag{21.2}$$

Hitrost vala je tem večja, čim močneje je vrv napeta in čim lažja je.

Odboj vala

Ko pride val do stene, se odbije nazaj. Pri tem se oblika vala ne spremeni, le prezrcali se glede na vrv: hrib se spremeni v dolino in obratno. Ko se odbiti val vrne na izhodišče, se seveda spet odbije od naše roke (ki sedaj miruje) nazaj in tako potuje sem in tja po vrvi. Ker moti trenje s podlago, pa se gibanje prej ali slej ustavi, ponavadi celo prej, preden se odbije od naše roke.



Slika 21.1 Potujoči val na vrvi. Da se poskus lepše posreči, ima vrv obliko tanke kovinske spirale. Val potuje po njej proti levi, kjer je pritrjena na steno, in se odbije nazaj proti desni. (PSSC – Physical Science Study Committee)

Interferenca valov

Če medtem, ko se val vrača, poženemo nov val vzdolž vrvi, se oba vala srečata. Ko prehajata drug skozi drugega, se zdi, kot da se njuni odmiki s ob vsakem času na vsakem mestu seštevajo: kjer pride vrh na vrh, se ustvari poudarjen vrh, in kjer pride vrh na dolino, se ustvari ravnina. Rečemo, da je to sestavljanje oziroma *interferenca* valov: $s = s_1 + s_2$. Ko prideta vala drug skozi drugega, nista nič spremenjena. Sestavimo lahko tudi dva vala, ki ju z vsakega konca vrvi pošlje tamkajšnji človek.

21.2 Valovanje na struni

Harmonično valovanje

Namesto da le enkrat trznemo z roko, lahko vrv vzbujamo z nihanjem s (krožno) frekvenco ω. V enem nihaju roke prepotuje nastajajoči val eno valovno dolžino. Odmik vala pri razdalji x ob času t je prav tak, kot je bil odmik roke ob prejšnjem času $t - x/c$. Vzdolž vrvi se zato s hitrostjo c širi val, ki ima obliko sinusoide z amplitudo s_0 in valovno dolžino λ:

$$s = s_0 \cos \omega(t - x/c) = s_0 \cos(kx - \omega t) \tag{21.3}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$c = \lambda\nu = \frac{\omega}{k}\,.$$

Stoječe valovanje

Z odbitega konca se vrača enak val. Mislimo si neskončno dolgo vrv in glejmo le njen osrednji del. Z leve vanj prihaja val $s_0 \cos(kx - \omega t)$ in z desne $s_0 \cos(kx + \omega t)$. Vala se seštevata. Kakšna je njuna vsota? Za lažje računanje postavimo $s_0 = 1$. Spomnimo se izrekov za kosinus vsote in kosinus razlike (15.15) Med seboj ju seštejemo in dobimo izrek za vsoto dveh kosinusov ter nato iz njega

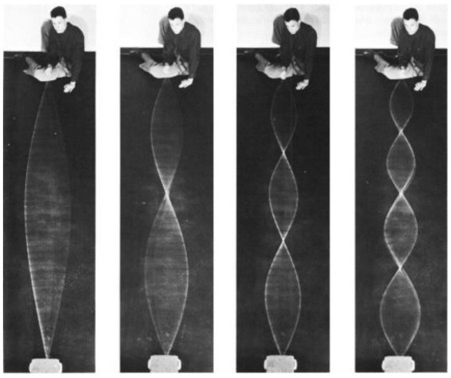
$$s = 2s_0 \cos kx \cos \omega t\,. \tag{21.4}$$

To je *stoječe valovanje*. Vse točke na vrvi nihajo sočasno, njihove amplitude pa so različne: na nekaterih mestih, medsebojno oddaljenih za *λ/2*, so amplitude enake nič; tam so *vozli* valovanja. Na sredini med vozli pa so amplitude maksimalne; tam so *hrbti* valovanja.

Lastno nihanje strune

Stoječe valovanje med dvema poljubnima vozloma se ne spremeni, če oba vozla pritrdimo in zunanje dele vrvi odrežemo. Enaki valovi, ki so prej prihajali od zunaj, zdaj nastajajo ob odbojih. Dolžina l obrezanega kosa vrvi je mnogokratnik polovične valovne dolžine: $l = N \cdot \lambda/2$, $N = 1, 2, 3 \ldots$

Na obeh koncih pritrjeno napeto vrv poimenujemo *struna*. Na struni dolžine l so očitno možna le stojna valovanja s točno določenimi valovnimi dolžinami, to je s točno določenimi frekvencami $\nu = N \cdot c/2l$, pri čemer je hitrost c določena z napetostjo in maso strune. Rečemo, da so to *lastne frekvence* strune. Najnižjo med njimi poimenujemo *osnovna frekvenca*, druge pa *višje frekvence*. Struna lahko niha tudi z več lastnimi frekvencami hkrati, vendar tedaj njihova vsota ni stoječe valovanje, temveč potuje sem in tja med obema koncema. Katere lastne frekvence se bodo pojavile v struni, je odvisno od tega, kako jo vzbujamo.



Slika 21.2 Stojno valovanje na struni. Struno vzbuja vrteč se mehanizem, človek pa uravnava njeno napetost ter s tem določa pravšnjo hitrost valovanja, da se pojavijo stojni valovi. Prikazana so štiri najnižja lastna nihanja. (PSSC – Physical Science Study Committee)

Lastna nihanja teles

Podobno kot napeta struna nihajo tudi napeta opna in nenapeta, a elastična telesa: na enem koncu vpet jeklen jeziček, na sredini podprta bronasta plošča ali obešen cerkveni zvon. Vsa ta telesa imajo svoje lastne frekvence. Namesto vozelnih točk pa se na ploščatih telesih pojavljajo vozelne črte. Vsaka lastna frekvenca ima svoj vzorec točk ali črt. Na vodoravni plošči jih lahko naredimo vidne tako, da nanjo posujemo prah in jo na robu vzbujamo z drsnim lokom.

Dovolj hitra nihanja strun in drugih teles slišimo. Takšna je, na primer, jeklena struna dolžine 1 m in s presekom 1 mm^2, napeta s silo 10 kp, ki ima – po računu – osnovno frekvenco nekaj čez 110 nihajev na sekundo. Enoti 1/s rečemo tudi *hertz* (Hz).

21.3 Gladinski valovi

Težni valovi

Kamen, ki ga vržemo v ribnik, naredi na gladini krožne valove, ki se širijo navzven. Na morju pa valove nenehno delajo vetrovi in občasno tudi potresi. Opišemo jih tako kot pri vrvi: z amplitudo, valovno dolžino, frekvenco in hitrostjo. Sila, ki jih poganja, je teža, zato jim rečemo *težni valovi*. Z ladje opazimo, da se dolgi valovi gibljejo hitreje kot kratki. Pri obali pa se zdi, da bolj ko je morje plitvo, počasnejši so valovi.

V globoki vodi

Opazujmo valove, ki se gibljejo vzdolž pomola! Morje naj bo precej globlje od valovne dolžine opazovanih valov. Ti naj se gibljejo od leve proti desni s hitrostjo c glede na pomol. Zamašek, ki plava na gladini, se dviguje in spušča ter s tem kaže frekvenco valov. Hkrati pa se giblje v desno, ko je na grebenu, in v levo, ko je v dolini. Desni premik je enak levemu (v resnici je malo večji). Zato predpostavimo, da površinski del vode, ki obdaja zamašek, kroži s hitrostjo v glede na pomol. Radij kroga je enak amplitudi valov, torej $v = 2\pi s_0 \nu$. V mislih se peljimo z vozičkom po pomolu v desno s hitrostjo c. Val sedaj glede na voziček miruje, morje pa teče po valovnem obrisu od desne proti levi. Na vrhu vala ima hitrost $c - v$ in v dolini $c + v$. Povečanje kinetične energije je enako zmanjšanju težne energije, kar vodi do izraza $2\rho g s_0 = 2\rho c v$. Ko vstavimo izraz za hitrost v, dobimo:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} = \frac{g}{k}\,. \tag{21.5}$$

Hitrost valov torej res narašča z njihovo dolžino. Val z dolžino 10 m, na primer, potuje po globokem morju s hitrostjo okrog 4 m/s. Poskusi kažejo, da je enačba uporabna vse do globine $H \approx \lambda$.

V plitvi vodi

Če je globina vode mnogo manjša od dolžine vala, deli vode ne morejo več krožiti, ampak postane njeno gibanje neodvisno od globine. Naj bo globina vode H. Po njej se naj giblje val od leve proti desni s hitrostjo c. Gibljimo se še mi vzporedno z njim! Spet velja, da je povečanje kinetične energije v dolini enako zmanjšanju težne energije preko dveh amplitud. Le spremembo hitrosti v sedaj računamo iz pogoja o ohranitvi pretoka: $(H + s_0)(c - v) = (H - s_0)(c + v)$. Če predpostavimo $s_0 \ll H$ in zato $v \ll c$, dobimo

$$c^2 = gH\,. \tag{21.6}$$

V plitvi vodi se valovi res gibljejo počasneje. Val z dolžino 10 m, na primer, se v vodi globine 1 m giblje s hitrostjo 3 m/s, kar je za 1 m/s manj kot prej v globoki vodi. Ker je globina proti obali čedalje manjša, se valovi čedalje bolj gostijo. Hkrati se tudi njihovi zadnji deli narivajo na prednje – valovom naraščajo grebeni do te mere, da se prekucnejo naprej. To so tisti beli valovi, ki pljuskajo ob obale.

Slika 21.3 Lomljenje valov ob obali. Morski val se v plitvi vodi giblje počasneje kot v globoki. Ko vpada na obalo, se zato njegovo zadnji deli narivajo na prednje. Val se lomi. Prikazan je veličasten val v Kaliforniji. (Anon)

Podmorski potresi lahko ustvarijo valove z dolžino 100 km. Za tak val je celo ocean globine 1 km plitva voda in po njem se giblje z veliko hitrostjo 100 m/s. Ladja na morju vala sploh ne opazi, ker je predolg in preblag. Ko pa pride do obale, se upočasni, naraste do višine nekaj metrov in uniči vse pred seboj. To je *tsunami*, strah in trepet obalnih prebivalcev.

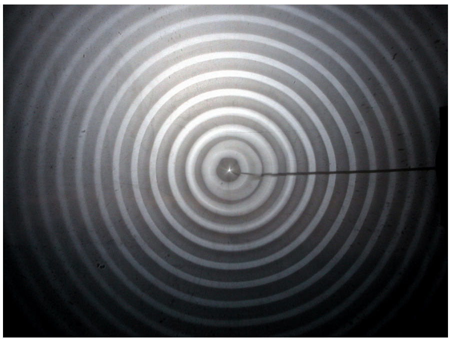
Kapilarni valovi

Privzeli smo, da gladinske valove poganja le težnost. Površinsko napetost, ki tudi prispeva svoj del, smo zanemarili. To je v redu, dokler so valovne krivine dovolj blage, to je, dokler so valovi dovolj dolgi. Poskusi pokažejo, da je to dovoljeno vse do valovne dolžine okrog 5 cm.

21.4 Fronte in žarki

Valovna kad

Če hočemo nadzorovano preučevati gladinske valove, moramo najprej izdelati pripravo za njihovo tvorjenje in širjenje. Najbolj priročna je plitva steklena kad z vodo. Valovanje v njej vzbujamo s kroglico ali vodoravno palico, ki ju premikamo gor in dol s kolesjem z ročico. Primerna vzbujevalna frekvenca je 10 Hz, kar ustvarja kapilarne valove z dolžino ~ 2 cm. Kroglica ustvarja krožne valove in palica ravne valove. Dno kadi je ob robovih položno dvignjeno, da blaži odboje od sten.



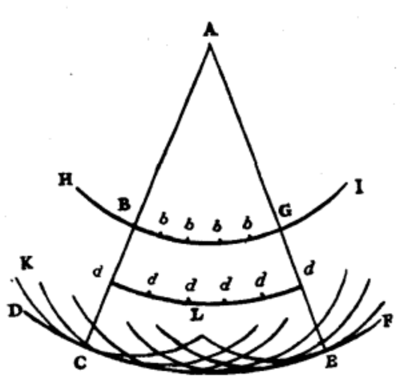
Slika 21.4 Krožno valovanje na vodi. Vzbuja ga nihajoča kroglica v središču. Valovni grebeni in doline so koncentrični krogi in se širijo navzven. (Harvard University)

Fronte in žarki

Pregled nad trenutno sliko ravnega ali krožnega valovanja kažejo kar grebeni ali doline valov – *valovne fronte*. Valovanje potuje pravokotno nanje. To lahko označimo s kratkimi puščicami. Če ustrezne puščice povežemo, dobimo *žarke*. Žarki kažejo smer valovanja in so pravokotni na fronte. Valovanje prikažemo s frontami ali z žarki; slednje je ponavadi lažje.

Elementarni valovi

Vsako točko na izbrani fronti lahko obravnavamo kot izvor krožnih "elementarnih" valov. Ti valovi med seboj interferirajo in njihova ovojnica ustvarja novo fronto. To je *princip elementarnih valov* (HUYGENS). Ravna fronta ustvarja ravno fronto in krožna fronta ustvarja krožno fronto.



Slika 21.5 Princip elementarnih valov. Vsak del krožne fronte BG je izvir elementarnih krožnih valov. Ti med seboj interferirajo in tvorijo novo krožno fronto CB. Izvorna fronta je lahko poljubne oblike. (Huygens, 1678)

Elementarni valovi se, s postuliranjem, širijo samo naprej. Njihova hitrost je odvisna od globine kadi. Če je kad neenakomerno globoka, se oblika front ustrezno spreminja.

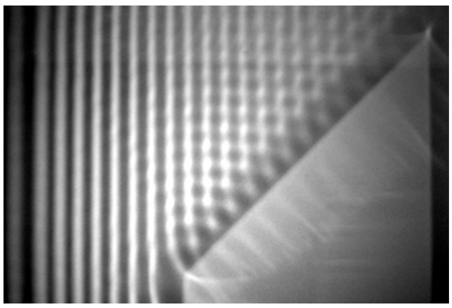
21.5 Odboj

Pravokotni vpad

Kako se vedejo valovi ob vpadu na oviro? V kad postavimo zid – navpično ravno ploščo, ki sega nad gladino. Ko ravna fronta vpade na ta zid pravokotno, se odbije naravnost nazaj: ob vsaki točki zida namreč sočasno zanihajo elementarni izvori in njihova ovojnica je spet ravna fronta. Ker vodna gladina ni privezana na zid, ampak lahko po njem drsi gor in dol, se grebeni valov odbijejo kot grebeni in doline kot doline. Pred zidom zato nastaja stojno valovanje, ki ima ob zidu nihalne maksimume.

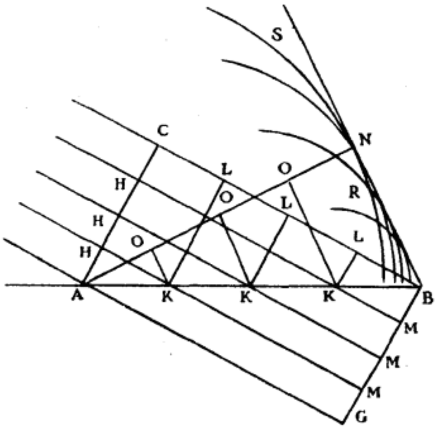
Poševni vpad

Pri poševnem vpadu pod kotom α_i glede na normalo se valovanje odbije na drugo stran normale pod odbojnim kotom α_r. Kaže, da je ta kot enak vpadnemu.



Slika 21.6 Odboj valovanja. Vodni valovi prihajajo z leve in se na poševni oviri odbijajo navzgor. Kjer se odbiti grebeni križajo z vpadnimi, je vidna njihova ojačitev. (Anon)

Voda ob vsaki točki ovire je izvor elementarnih valov. Morda lahko iz njihove interference ugotovimo, kako se vpadajoče fronte odbijajo?



Slika 21.7 Odbojni zakon, izpeljan iz principa elementarnih valov. (Huygens, 1678)

Ko se ravna fronta AC dotakne ovire v točki A, je frontna točka C od ovire oddaljena še za razdaljo CB. V času, ko točka C doseže oviro v točki B, pa točka A že odda elementarni krožni val z radijem AN = BC. Medtem tudi vmesne točke H zapovrstjo prispejo do točk K in od tam oddajo ustrezne krožne valove. Ovojnica teh valov tvori odbito fronto. Predstavimo jo s tangento iz točke B skozi točko N na valu iz točke A. Ker $\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\sin(\pi/2 - \alpha_\mathrm{i})$, $\mathrm{BN} = \mathrm{AB}\sin(\pi/2 - \alpha_\mathrm{r})$ in AC = BN, sledi:

$$\alpha_\mathrm{i} = \alpha_\mathrm{r}\,. \tag{21.7}$$

To je (že poznani) odbojni zakon (12.1). Odbito valovanje ima isto amplitudo, valovno dolžino, frekvenco in hitrost kot vpadno valovanje.

Odbojni zakon velja tudi za ukrivljeno oviro, le njeni krivinski radiji morajo biti mnogo večji od valovne dolžine. Takrat lahko vsak del ovire obravnavamo kot ravno oviro, le vpadni koti se od dela do dela spreminjajo.

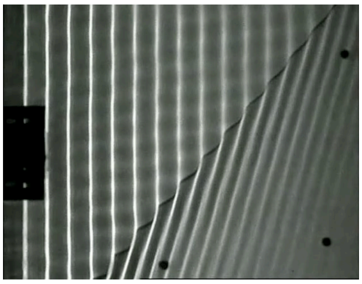
21.6 Lom

Pravokotni vpad

Kako se valovanje vede, če pride v območje, kjer se mu spremeni hitrost? Na dno kadi položimo pravokotno stekleno ploščo, ki ne sega do gladine. S tem ustvarimo plitvino, kjer se valovi gibljejo počasneje. Ravni valovi, ki vpadajo pravokotno na rob plošče s hitrostjo c_i, se deloma odbijejo, večinoma pa nadaljujejo naprej z manjšo hitrostjo c_t. Prepuščeno valovanje ima isto frekvenco kot vpadno valovanje: na meji si namreč valovanji z obeh strani takorekoč stresata roko kot dva človeka; ne more eden stresati hitreje kot drugi. Ker pa je hitrost manjša, je tudi valovna dolžina (prepotovana razadalja po enem nihaju) ustrezno krajša.

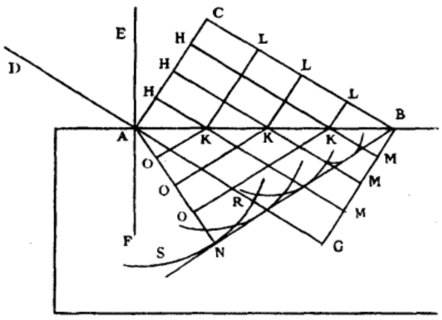
Poševni vpad

Pri poševnem vpadu pod kotom α_i glede na normalo se valovanje na robu plošče deloma odbije, večinoma pa zlomi in nadaljuje pot v novi smeri α_t glede na normalo.



Slika 21.8 Lom valov. Vodni valovi vpadajo z leve na poševni rob plitvine in se lomijo. Njihova hitrost in valovna dolžina se zmanjšata, frekvenca pa ostane ista. Vidni so tudi šibki odbiti valovi. (Anon)

Kakšna je smer lomljenega valovanja, poskusimo izpeljati iz principa elementarnih valov, prav kakor pri odboju.



Slika 21.9 Lomni zakon, izpeljan iz principa elementarnih valov. (Huygens, 1678)

Razmislek je podoben kot prej. Razlika je le v tem, da velja $\mathrm{CB}/c_\mathrm{i} = \mathrm{AN}/c_\mathrm{t}$, zato

$$\frac{\sin\alpha_\mathrm{i}}{\sin\alpha_\mathrm{t}} = \frac{c_\mathrm{i}}{c_\mathrm{t}}. \tag{21.8}$$

To je že poznani lomni zakon (12.3). Prepuščeno valovanje je prav takšno kot pri pravokotnem vpadu, saj je naravi vseeno, v katero smer potujejo valovi po plitvini. To pomeni, da ima isto frekvenco, a manjšo hitrost in krajšo valovno dolžino kot vpadno valovanje. Lomni kot je manjši od vpadnega – valovanje se lomi proti vpadni pravokotnici.

Popolni odboj

Namesto da spuščamo valove na območje z manjšo hitrostjo, jih lahko spuščamo obratno. Poskusa ni treba zares opraviti, saj lahko v mislih zavrtimo prejšnji poskus nazaj. Lomni zakon velja v nespremenjeni obliki. Le valovanje se zdaj lomi proč od vpadne pravokotnice. Težava nastane, če je vpadni kot tako velik, da lomni kot preseže 90°. Sklepamo, in poskus to potrdi, da tedaj ne pride več do loma, ampak se celotno valovanje odbije nazaj po odbojnem zakonu. Rečemo, da je to *popolni odboj*. Mejni kot zanj znaša $\sin\alpha_\mathrm{i} = \mathrm{c_i}/\mathrm{c_t}$. Pri svetlobi smo ga že spoznali [12.3].

21.7 Uklon

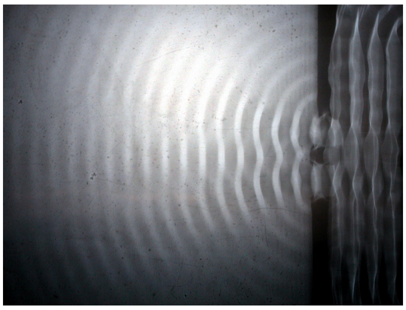
Dosedanje ovire so bile razsežne: njihove robove smo postavili v neskončnost. Kako pa se ravno valovanje širi skozi odprtino v zidu ali mimo njegovega roba?

Ozka reža

Najpreprostejša je ozka reža v ravnem zaslonu, na katerega vpada ravno valovanje. Reža naj bo mnogo ožja od valovne dolžine. Nihanje vode v njej ima potem iste posledice, kot da bi tam vodo zbujali s kroglico: reža "ustvarja" krožno valovanje. Rečemo, da se valovanje na reži *uklanja*.

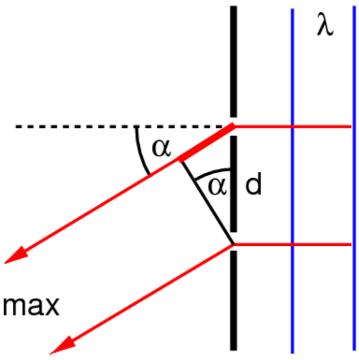
Dve reži

Kaj pa dve reži na medsebojni oddaljenosti d, primerljivi z valovno dolžino? Nanju naj pravokotno vpada ravno valovanje. To sta potem dva točkasta izvora, ki nihata sočasno in ustvarjata vsak svoje krožne elementarne valove. Oboji se seštevajo v skupno interferenčno sliko.



Slika 21.10 Ukon valov za dvema režama, na kateri z desne vpada ravno valovanje. Uklonjeno valovanje je v nekaterih smereh ojačano, v drugih oslabljeno. (Harvard University)

Na določenih mestih je uklonjeno valovanje ojačano. To je tam, kjer je razlika poti od obeh izvorov enaka mnogokratniku valovne dolžine λ.



Slika 21.11 K uklonu na dveh režah. Prikazana je smer proti oddaljenemu maksimumu. Žarka do njega sta skoraj vzporedna.

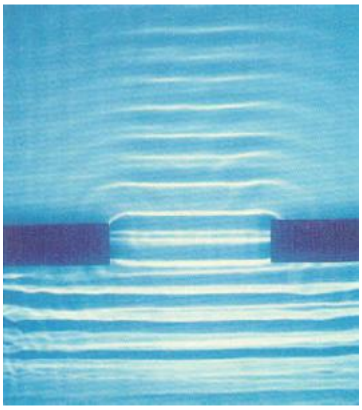
Če opazujemo valovanje pri veliki oddaljenosti od zaslona, ležijo ojačitve v smereh α, ki so določene s pogojem

$$d \sin \alpha = N\lambda, N = 0, 1, 2 \ldots \tag{21.9}$$

Enačba omogoča, da določimo valovno dolžino vodnega valovanja, če izmerimo enega ali več ojačitvenih kotov po prehodu skozi dve reži. Če uporabimo več rež z enako medsebojno razdaljo, ostanejo smeri curkov nespremenjene, curki sami pa so ojačani in zoženi.

Široka reža

Ko valovna fronta zadene zid, doprinašajo k njenemu napredovanju le tisti elementarni izvori, ki jim zid ne zapira poti. Odprt izvor tik ob robu zida nima dejavnih sosedov na zaprti strani, zato njegovo valovanje ne interferira z njihovimi in se – v prvem približku – širi za rob v nespremenjeni, polkrožni obliki.



Slika 21.12 Uklon valov za široko režo. Vodni valovi vpadajo na režo v oviri. Za njo nastaja curek valovanja, katerega robovi so uklonjeni proč od prvotne smeri. (University Melbourne)

Uklon za robom zida tudi kaže, kakšen uklon je pričakovati za kratkim zidom ali za ozko režo v zidu; obe oviri namreč sestavljata po dva robova. Opazovanja potrdijo: pri prehodu skozi režo se valovanje uklanja navzven in pri vpadu na zid se uklanja navznoter. Uklon je tem močnejši, čim ožja je ovira v primerjavi z valovno dolžino.

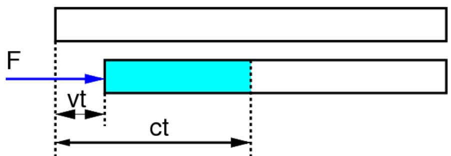
21.8 Zvočni valovi

Kompresijski valovi

Nihajočo struno slišimo – očitno se njeni tresljaji prenašajo po zraku do ušes kot neke vrste valovi. Recimo jim *zvočni valovi* ali kar *zvok*. Da je za širjenje zvoka res potreben zrak, pokaže poskus z zvoncem pod izčrpano posodo. Zvok se širi tudi pod vodo, kakor ve vsak, ki se je kdaj potapljal. Tudi skozi tanko steno slišimo: zvok torej prav tako potuje skozi trdnine. Ker zrak in voda nista strižno elastična, zvočni valovi ne morejo biti *prečni* na smer gibanja, kakor so, na primer, pri struni ali opni. Predstavljamo si, da so valovi *vzdolžni*: deli zraka nihajo v smeri valovanja in tvorijo zaporedne zgoščine in razredčine. Rečemo, da so to *kompresijski valovi*. Valovi se uklanjajo in odbijajo: slišimo glasove izza stavb in odmeve od ukanja v gorah.

Hitrost zvoka

Kakšna je hitrost zvoka? Od česa je odvisna?



Slika 21.13 Shema za izpeljavo hitrosti zvoka v plinu ali tekočini.

Predstavljajmo si vodoravno cev preseka S, napolnjeno s plinom. Na enem koncu naj začne nanj delovati bat s silo F. Pred sabo ustvarja čedalje daljšo homogeno zgoščino, katere vsak del se giblje s hitrostjo v, njeno čelo pa s hitrostjo c. V času t prepotuje valovno čelo razdaljo ct; masa nastale zgoščine znaša $m = \rho Sct$. Bat medtem prepotuje razdaljo vt. Za toliko se nastala zgoščina skrči. Sila bata ima dve posledici: skrči zgoščino relativno za vt/ct

in podeli ji hitrost v. Prvo zapišemo kot $F = KSv/c$ in drugo kot $F = mv/t$. Po izenačenju obeh izrazov dobimo

$$c^2 = \frac{K}{\rho}\,. \tag{21.10}$$

Hitrost je neodvisna od frekvence. Ista enačba velja tudi za tekočine. Pri plinih dodatno vemo, da znaša njihova stisljivost $K = p$ [20.4]. Pri trdninah pa moramo upoštevati, da se elastična palica ne krči in razteza samo vzdolžno, ampak se hkrati tudi prečno debeli in tanjša. Hitrost zvoka je zato v trdnini odvisna tudi od tega, kakšne oblike je telo: po okrogli palici se širi drugače kot po plošči ali po neomejenem sredstvu.

Stoječi zvok

Po zgledu strune, na kateri so možna le valovanja s točno določenimi frekvencami, pričakujemo isto za stolpec zraka, ki je zaprt v cevi. Razlika je le v tem, da zrak niha vzdolžno in da je cev lahko zaprta na dveh ali na enem koncu. Takšni cevi z zrakom rečemo *piščal*. Na enem koncu jo vzbujamo s pihanjem v režo ali skozi nastavek z jezičkom. Na drugem koncu je vozel ali nihajni ekstrem. Vmes se zvrsti sodo ali liho število četrtink valov. S tem so lastne frekvence določene in sicer zgolj z dolžino piščali. Če v cev izvrtamo luknje in jih pokrivamo s prsti, spreminjamo njeno dolžino in s tem zvok. Takšno piščalko je izdelal že pračlovek, do danes pa so jo glasbeniki razvili v raznovrstna pihala in trobila.

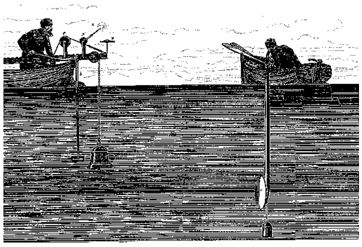
Resonanca

Gotovo ima tudi zrak v poljubni votlini, ne le v cevi, svoja lastna nihanja. Ta so trodimenizonalna. Kakšne so ustrezne vozelne ploskve, je odvisno od velikosti in oblike votline. Votlinski zrak vzbujamo skozi odprtino v steni. S pravo frekvenco vzbujanja začne doneti. To lepo slišimo, ko pihamo mimo ustja prazne steklenice. Če stene votline niso toge, imajo tudi one lastna nihanja. Kadar se oboja nihanja ujamejo, votlina posebno močno doni. Rečemo, da je *resonantna* z vzbujevalno frekvenco. Tudi to so odkrili že davni predniki, ko so naredili prvi boben (nad votlino razpeto opno) in lutnjo (nad votlino napete strune). Do danes so iz njiju nastala različna tolkala, brenkala in godala.

21.9 Merjenje zvoka

Hitrost

Hitrost zvoka v zraku zlahka izmerimo. Na primernem hribu ustrelimo s topom in na drugem hribu merimo čas med bliskom eksplozije in njenim gromom. Pri tem predpostavljamo, da se svetloba širi mnogo hitreje kot zvok. Tako ob različnih stanjih ozračja izmerimo okrog $340 \pm 10\,\mathrm{m/s}$. Vsakokratna meritev je za 20 % večja, kot napoveduje enačba (21.10). Domnevamo, da je kriva stisljivost zraka: pri hitrih stiskanjih in raztezanjih v valovanju morda ni takšna, kot je pri počasnih spremembah, ampak je večja: $K = \kappa p$, $\kappa = 1.4$. V vodi na mirnem jezeru pa izmerimo hitrost okrog $1500\,\mathrm{m/s}$, kar se dobro ujema z izračunom.



Slika 21.14 Meritev hitrosti zvoka v vodi. Prikazana je meritev na Ženevskem jezeru preko razdalje 10 milj. (Colladon, 1826)

Ko poznamo hitrost zvoka, lahko izračunamo, kako dolge zvočne valove oddajajo nihajoče strune. Tista, ki niha s frekvenco 110 Hz, oddaja valove z dolžino 3 metre.

Frekvenca

Lastne frekvence strune in piščali znamo izračunati. Kako pa bi izmerili (glavno) frekvenco neznanega izvora, recimo človeškega glasu ali brenčanja komarja? Ni druge, kot da uporabimo primerno merilno struno dolžine l_0 s premičnim mostičkom. To struno najprej z vijačnim natezalom uglasimo, s poslušanjem, na frekvenco ν_0 referentnih glasbenih vilic. (Frekvenco teh vilic smo predhodno in enkrat za vselej določili po struni z nastavljivo obremenitvijo). Potem s poskušanjem premaknemo mostiček v tako lego, da zveni nihajoči del strune l enako kot merjenec. S tem je določena tudi neznana frekvenca: $\nu = (l_0/l)\nu_0$. Namesto merilne strune lahko uporabimo kitaro ali klavir, ki pa ju je predtem seveda tudi potrebno uglasiti.

Valovna dolžina

Valovno dolžino zvoka merimo na stoječih valovih. Vodoravno stekleno cev, v kateri je natrosen plutovinast prah, zapremo na enem koncu s premičnim batom in na drugem z gumijasto opno. To vzbujamo z zvočilom – preko vmesnega zraka ali napete žice. Ob tem premaknemo bat v tako lego, da v cevi nastane stojno valovanje: pokaže ga prah, ki se nakopiči v vozlih; tam namreč zrak miruje. Tedaj je dolžina cevi nek mnogokratnik valovne dolžine zvoka. Razdalja med dvema sosednjima vozloma znaša polovico valovne dolžine.

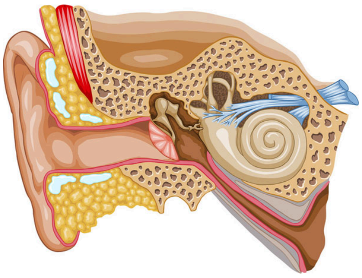
21.10 Glas in sluh

Glasilke

Človek nosi s seboj svoje lastno zvočilo – *glasilke*, ki jih trese tok zraka iz pljuč in ki jih z mišicami bolj ali manj napenjamo. Nastale zvočne valove nadalje oblikujemo v ustni votlini s spreminjanjem njene oblike in velikosti. Dosegljivo nam je frekvenčno območje med 80 Hz (moški bas) in 1000 Hz (ženski sopran). Odrasli imajo daljše in debelejše glasilke kot otroci, zato so njihovi glasovi nižji od otroških.

Uho

Zvok slišimo zato, ker v našem ušesu vzvalovi *slušne resice*. Najbolj zanihajo tiste, ki imajo podobne lastne frekvence kot poslušani zvok. Poskusi z različnimi strunami in piščalmi (za katere znamo frekvence izračunati) povejo, da slišimo frekvence med 20 in 20 000 Hz. Na stara leta se zgornja meja močno niža. To je človekov *slušni obseg*. Iz hitrosti zvoka izračunamo, kakšne so ustrezne valovne dolžine: segajo od 17 metrov do 1,7 centimetra.



Slika 21.15 Presek človeškega ušesa. Zvok trese bobnič. Tresenje se preko koščic prenaša v polžasto cev, napolnjeno s tekočino. V cevi so dlačice različnih dolžin. Tiste, ki so v resonanci z zvokom, zanihajo. (Maine Academy of Audiology)

Infrazvok in ultrazvok

Prenizkih in previsokih tonov ljudje ne slišimo. To pa ne pomeni, da ne obstajajo: saj lahko strune in druga telesa nihajo počasneje ali hitreje od slišnih frekvenc. Rekli bomo, da oddajajo *infrazvok* oziroma *ultrazvok*. Kaže, da nekatere živali proizvajajo in slišijo te "neslišne" frekvence. Netopirji, na primer, imajo velika ušesa in pri letanju stalno odpirajo gobčke, kot da bi kričali. Verjetno oddajajo ultrazvok (ker so majhni) in poslušajo odmeve ter s tem "gledajo" oziroma "tipajo" okolico. Podobno se zdi za delfine v vodi, ko lovijo ribe. Plavanje kitov pa kaže, da se sporazumevajo na velike razdalje, verjetno z infrazvokom (ker so veliki).

21.11 Glasbila in glasba

Kitara

Kaj bi bil človek brez petja in glasbe? Med mladimi je zelo priljubljena kitara.

Slika 21.16 Španska kitara. Ima šest strun. Z eno roko jih krajšamo, z drugo brenkamo po njih. Za ojačanje zvoka poskrbi resonantna votlina. (Anon)

Sodobna kitara je plod dolgotrajnega razvoja. Ima šest vzporednih, enako dolgih strun različne debeline. Druga struna po vrsti (od debelih proti tankim) je takšna in tako napeta, da niha z osnovno frekvenco 110 Hz. Krajšamo jo s pritiskanjem ob podložne prečke. Ena izmed prečk, dvanajsta po vrsti, leži natanko na polovici strune. Tam skrajšana struna ima zato dvakrat višjo frekvenco od neskrajšane. Prečke so nameščene v takšnih presledkih, da zaporedne frekvence naraščajo v razmerju $2^{1/12}:1 \approx 1{,}06:1$. Vsaka naslednje frekvenca je torej za 6 % višja od predhodne. Rečemo, da je višja za en "polton". Vseh prečk je ponavadi devetnajst: na zadnjo prečko skrajšana struna ima zato frekvenco povišano za faktor $2^{19/12} = 3{,}00$.

Preostale strune imajo druge osnovne frekvence. Strune 2, 3 in 5, skrajšane na šesti prečki, imajo isto frekvenco kot njim sledeče odprte strune. Struni 1 in 4 je treba krajšati na peti prečki. Na ta način pripade šesti struni na peti krajšavi frekvenca 440 Hz. Zvok kitare sega od okrog 80 Hz (odprta najdebelejša struna) do preko 1000 Hz (najbolj skrajšana najtanjša struna). To je tudi razpon človeškega glasu od moškega basa do ženskega soprana. Kitaro uglasimo tako, da najprej uglasimo odprto drugo struno z glasbenimi vilicami, nato pa z ustreznimi krajšavami še vse ostale po vrsti. Začnemo lahko tudi s šesto struno na peti krajšavi.

Harmonija

Zakaj je interval med osnovno in dvakratno frekvenco razdeljen ravno na 12 delov? In zakaj so zaporedne strune na kitari tako čudno medsebojno uglašene? Zato, da s čim manj prijemi in premiki tiste roke, ki skrajšuje strune, izbiramo "lepo" zveneča zaporedja in vzporedja tonov – glasbo.

Glasbeniki so namreč odkrili naslednje. Različne kombinacije tonov vzbujajo v nas različne občutke. Tako, na primer, dve frekvenci, ki sta v razmerju 2:1, zvenita "sozvočno". Med takima frekvencama je, po definiciji, 12 poltonov: $2^{12/12}:1 = 2:1$. Podobno je s frekvencama v razmerju 3:2, ki sta tudi sozvočni. Zapišemo ju lahko kot $2^{7/12}:1 = 1{,}50:1 = 3:2$; med njima je torej 7 poltonov. Razmerju 4:3, tudi sozvočnem, pa ustreza izraz $2^{5/12}:1 = 1{,}33:1 = 4:3$; med obema frekvencama je zdaj 5 poltonov. Kaže, da ljudje kot sozvočne čutimo takšne frekvence, ki so v nizkih celoštevilčnih razmerjih. Ta razmerja pa učinkovito ustvarimo z 12-stopenjsko delitvijo. Z bolj grobo delitvijo ne bi mogli tako natančno ustvariti zahtevanih celoštevilskih razmerij. Bolj drobna delitev pa bi zahtevala krajše razmike med prečkami ali daljše in močneje napete strune. Absolutna vrednost 440 Hz je bila izbrana dogovorno za poenoteno uglasitev vseh vrst glasbil, da se lepo ujamejo, ko igrajo skupaj.

21.12 Frekvenčni zamik

Gibanje opazovalca

Ladja, ki pluje proti valovom, prejme v časovni enoti več valov, kot če bi mirovala. Zakaj ne bi to veljalo tudi za zvočne valove v zraku? Poslušalec, ki se giblje proti zvočilu, bi zato moral slišati povišano frekvenco. Kakšno? V časovni enoti Δt zadene mirujočega poslušalca $\nu\Delta t$ valov. Ko se bliža izvoru s hitrostjo v, napravi v enakem času pot $v\Delta t$, na katero odpade $v\Delta t/\lambda$ valov. Ti valovi se dodajo onim, ki bi jih slišal v mirovanju. Skupno število valov, preračunano na časovno enoto, in upostevajoč $c = \lambda\nu$, pove, kakšno frekvenco ν' zazna (DOPPLER):

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 + \frac{v}{c}\,. \tag{21.11}$$

Če se torej poslušalec giblje s hitrostjo 20 m/s, se frekvenca poveča za 6 %, kar je približno za polton oziroma za eno letvico na kitari. To je povsem zaznavno. Zapisana enačba velja tudi za oddaljujočega se poslušalca, le predznak hitrosti moramo obrniti.

Gibanje izvora

Kaj pa, če se giblje zvočilo proti mirujočemu poslušalcu? V času Δt odda izvor $n = \nu \Delta t$ valov. Stisnejo se na razdaljo $l = c\Delta t - v\Delta t$. Sprejemnik zato opazi valovno dolžino $\lambda' = l/n$, kar ob upoštevanju $c = \lambda'\nu'$ pomeni (DOPPLER)

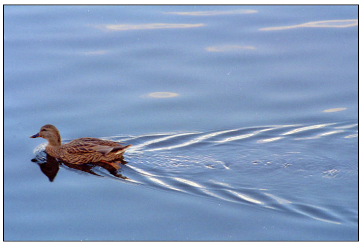
$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 - v/c}\,. \tag{21.12}$$

Če $v \ll c$, se enačba poenostavi v obliko iz prejšnjega primera. Za oddaljujoči se izvor je treba obrniti predznak njegove hitrosti. Ne smemo tudi pozabiti, da so vse hitrosti mišljene glede na morje ali zrak in ne na trdna tla. Enačbe kvalitativno preverimo tako, da spustimo sani s piščalkarjem po hitrem klancu, se postavimo ob progo ter poslušamo spremembo piska ob mimohodu.

21.13 Valovno čelo

Hitro gibanje

Hitrost tekmovalnega čolna na vesla je večja od hitrosti valov, ki jih povzroča, zato teh pred njim ne more biti. To velja tudi za raco, ki plava po ribniku.



Slika 21.17 Valovno čelo. Raca plava hitreje, kot se širijo kratki vodni valovi, ki jih povzroča. Njihova ovojnica se kaže kot koničasta valovna sled. (Anon)

V času Δt se čoln premakne iz trenutne lege za $v\Delta t$, elementarni krožni val pa le za $c\Delta t$. Tangenta iz kljuna čolna na ta val določa ovojnico – koničasto *valovno čelo*. Nagib čela glede na smer čolna je določen z razmerjem premikov čolna in polmera elementarnega vala:

$$\sin\theta = \frac{c}{v}\,. \tag{21.13}$$

Podobno velja za let puškine krogle z nadzvočno hitrostjo po zraku. Ko te preleti, slišiš valovno čelo kot rezek pok. Tudi konec spretno zavihtenega biča je hitrejši od zvoka in slišimo njegov tlesk.

21.14 Energija

Valovna energija

Posamezni deli strune so nihala, ki nihajo okrog svojih ravnovesnih leg in imajo vsako svojo kinetično ter prožnostno energijo. Podobno velja za gladinske in zvočne valove, le da imajo prvi potencialno energijo zaradi teže in drugi zaradi prožnosti. Vsoto kinetičnih in potencialnih energij vseh nihal v opazovanem prostoru ob izbranem času poimenujmo *valovna energija* W. Ta energija, preračunana na ustrezno prostorsko enoto – dolžino, ploščino ali prostornino – definira *gostoto energije*. Za zvočno valovanje zapišemo

$$w = \frac{W}{V}\,. \tag{21.14}$$

Energijski tok

Ko valovanje potuje, nosi s sabo energijo. Koliko energije preide na časovno enoto skozi opazovani presek, povemo z *energijskim tokom*

$$P = \frac{W}{t}\,. \tag{21.15}$$

Tok preračunamo na normalno ploskovno enoto in s tem definiramo *gostoto (energijskega) toka*; pri zvoku ji rečemo tudi *glasnost*:

$$j = \frac{P}{S}\,. \tag{21.16}$$

V času t preide skozi opazovani normalni presek S z valovanjem $wSct$ energije, zato

$$j = cw\,. \tag{21.17}$$

Energijski tok, ki ga zvočilo seva v ozek prostorski kot $\Omega = S/r^2$, se ohranja, če sprotni odboji, lomi in dušenja na ovirah niso premočni. Tedaj gostota toka pojema z oddaljenostjo vzdolž žarka takole:

$$j = \frac{P/\Omega}{r^2} = \frac{I}{r^2}\,. \tag{21.18}$$

Kadar je sevanje v vse smeri enako, *izotropno*, se enačba poenostavi v $j = P/4\pi r^2$. Čim dalj smo od zvočila, tem šibkejši zvok slišimo.

Energijski spekter

Pri harmoničnem nihalu je vsota kinetične in potencialne energije v vsakem trenutku konstantna. To pomeni, da je kar enaka maksimalni kinetični ali maksimalni potencialni energiji. Za harmonično valovanje zato velja

$$w = \frac{1}{2}\rho {v_0}^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 {s_0}^2\,. \tag{21.19}$$

Gostota energije na nekem mestu je torej sorazmerna s kvadratom frekvence in amplitude tamkajšnjega harmoničnega nihanja. Če je to nihanje sestavljeno iz več harmoničnih komponent, pa velja povedano za vsako komponento posebej. Rečemo, da je energija porazdeljena po frekvencah. To porazdelitev poimenujemo *valovni spekter*. Različne zvočne spektre sliši uho kot tone, zvene in šume.

Zapisana enačba omogoča, da izračunamo gostoto energije – in vse z njo povezane količine – v primerih, ko je valovanje približno harmonično in mu lahko izmerimo frekvenco in amplitudo. Slednje zmoremo za struno in za gladinsko valovanje, ne pa tudi za zvok. Lahko pa enačbo uporabimo v nasprotni smeri – za oceno velikosti zvočnih amplitud. Najprej izračunamo, kakšna je energija nihajoče kitarske strune. Potem ocenimo čas, v katerem se struna ustavi, in s tem oddajani energijski tok. Tako sta določena tudi gostota toka in gostota energije na primerni razdalji. Iz ene ali druge sledi, da imajo "pogovorne" zvočne amplitude neverjetno majhen red velikosti: $s_0 \sim 0{,}1\,\mu$m in $v_0 \sim 0{,}1$ mm/s! Uho je torej res silno občutljiv merilnik. □

22 Toplota

Toplotno raztezanje – Plinski termometer – Tekočinski termometri – Plinska enačba stanja – Raztezni koeficienti – Notranja energija, delo in toplota – Specifična toplota – Stiskanje in raztezanje plina – Utekočinjanje plina – Talilna, izparilna in sežigna toplota – Parni tlak tekočin – Vlažni zrak – Parni stroj – Eksplozijski motor – Hladilni stroj – Konvekcija – Toplotni vetrovi – Toplotni tok

22.1 Toplotno raztezanje

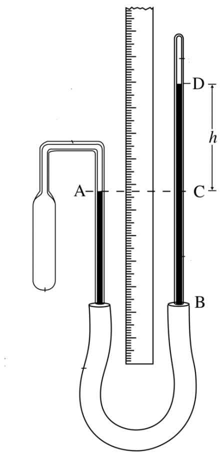
Žoga na pripeki

Gumijasta žoga se na sončni svetlobi segreva, napenja in veča: zrak v njej se očitno razteza. Domnevamo, da se pri segrevanju raztezajo tudi druge snovi – plini, tekočine in trdnine. Takšno raztezanje lahko služi kot pokazatelj temperature. Izdelati hočemo pripravo, ki bo to delala.

22.2 Plinski termometer

Plinski termoskop

Dobro možnost za določanje temperature obeta zrak v togi, neraztezni posodi. Tak zrak se ne razteza, marveč se mu pri segrevanju zgolj veča tlak, kar lepo vidimo s priključenim manometrom. To je *plinski termoskop*. Temperaturo kaže s svojim tlakom.



Slika 22.1 Plinski termoskop. Merilni plin je v stekleni bučki. Tlak plina narašča s temperaturo. Z dviganjem in spuščanjem desnega kraka manometra skrbimo za to, da ostaja prostornina plina nespremenjena. (Brock University)

Vrelišče in ledišče vode

Ko bučko termoskopa segrevamo v vodni kopeli nad gorilnikom, se tlak v njem počasi dviga. V vreli vodi doseže najvišjo vrednost – pokaže temperaturo *vrelišča* – in tam ostane. Podobno je pri ohlajanju: v ledeni vodi, po kateri plavajo kosi ledu, se termoskopski tlak zniža vedno do iste točke, temperature *ledišča* oziroma *tališča*. Kje je vrelišče, je precej odvisno od zunanjega zračnega tlaka: nižji ko tlak, nižje je vrelišče. Zmrzovališče se ne spreminja zaznavno. Pri istem zunanjem tlaku vre ali zmrzuje voda vedno pri istih temperaturah.

Absolutna temperatura

Naj v bučki v ledenomrzli kopeli znaša termoskopski tlak p_0 in v vreli vodi p_1. Poskus pokaže, da znaša relativna sprememba tlaka (AMONTONS)

$$\frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{1}{2{,}73}\,. \tag{22.1}$$

To razmerje je neodvisno od začetnega tlaka p_0 in od vrste plina: zraka, kisika, vodika in drugih, ki jih še znamo pridobivati. *Absolutno temperaturo T* definiramo kot sorazmerno s tlakom. Pri tem hočemo imeti med lediščem in vreliščem 100 enot, poimenujmo jih *kelvin* (K), zato moramo ledišču pripisati 273 enot:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \tag{22.2}$$
$$T_0 = 273\,\mathrm{K}\,.$$

To je plinska definicija temperature. Tako definirana temperatura je vedno pozitivna. Njeno merjenje je načeloma preprosto. Termoskop potisnemo v ledeno vodo, pri čemer pokaže tlak p_0. Potem ga vtaknemo v merjenec, recimo v toplo vodo, in pokaže tlak p. Temperatura znaša $T = (p/p_0) \cdot 273\,\mathrm{K}$.

Zaradi udobnosti preimenujemo tlačno skalo na manometru kar v temperaturno in dobimo *plinski termometer*. Temperatura je s tem definirana navzdol do tja, dokler merilni plin še obstaja, preden se kondenzira v tekočino, in navzgor do tam, ko še zdrži posoda. Ali je tako definirana temperatura res sorazmerna s tlakom, pa ostaja nesmiselno vprašanje, vse dokler je ne bomo merili še na kak drug način. Zdaj, ko je temperaturna skala določena, pa se nanaša enačba (22.2) tudi na poljubno stanje T_0 in p_0. V tem smislu ji bomo rekli *plinski izohorni zakon* (GAY-LUSSAC).

Relativna temperatura

Absolutne temperature imajo v vsakdanjem okolju neprijetno velike številske vrednosti. Zato uvedemo novo količino, *relativno temperaturo*, takole:

$$\theta = (T - 273\,\mathrm{K})\,\frac{{}^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{K}}\,. \tag{22.3}$$

Njeno enoto poimenujemo *stopinja* (°C). Relativna temperatura se šteje od ledišča vode naprej in nazaj v stopinjah, ki so enako velike kot kelvin. Ledišče vode je torej pri 0 °C in vrelišče pri 100 °C.

22.3 Tekočinski termometri

Živosrebrni termometer

Merjenje s plinskim termometrom je nerodno. Kaj pa, če bi uporabili razteg tekočin? Poskušanje nas vodi do naslednjega. V stekleno bučko, ki se podaljšuje v navpično tanko cevko s stalnim premerom, natočimo živo srebro in ga previdno segrevamo nad plamenom, da se raztegne do vrha. Tedaj cevko zatalimo in pustimo, da se živosrebrna nitka zopet skrči, pri čemer nad njo ostane brezzračni prostor. Tako smo izdelali *živosrebrni* *termometer* (FAHRENHEIT). Zaradi zaprte cevke ni občutljiv na zunanji zračni tlak. In ker v cevki ni zraka, tudi ni občutljiv na notranji zračni tlak.

Živosrebrni termometer umerimo s plinskim termometrom v ohlajajoči se vodni (ali oljni) kopeli, stopinjo za stopinjo. Pokaže se, da so živosrebrne stopinje lepo enakomerne. Z njim merimo na intervalu med −40 °C, ko živo srebro zmrzne, in 300 °C, ko že precej izhlapeva ter s svojim parnim tlakom moti širjenje.

Alkoholni termometer

Za merjenje je uporaben tudi obarvan alkohol, ki ima precej nižje ledišče kot živo srebro, a tudi nižje vrelišče, okrog 80 °C. Njegove stopinje, narisane na skali, niso povsem enakomerne: ponekod so daljše in drugod krajše.

Slika 22.2 Termometer – merilnik temperature. V bučki s cevko je obarvan alkohol, ki se s porastom temperature razteza. Prikazan je stenski instrument za merjenje temperature zraka. (Weather Station Products)

Tekočinski termometri z dovolj tankimi cevkami omogočajo odčitavanje temperature na 0,1 °C natančno. Z njimi izmerimo, da ima zdravo človeško telo temperaturo 37 °C. Temperatura zraka v Ljubljani znaša od −15 °C pozimi do 35 °C poleti. Temperature v puščavah presegajo 50 °C in na polih padejo pod −80 °C.

Vsak termometer kaže svojo lastno temperaturo. Ko, recimo, vtaknemo hladen termometer v topel merjenec, se temperaturi izravnata: termometer se segreje in merjenec se ohladi. Termometer mora biti tako majhen, da je sprememba merjenca neznatna.

22.4 Plinska enačba stanja

Enačba stanja

Odvisnost med tlakom in prostornino plina (pri stalni temperaturi) $p \propto 1/V$ ter odvisnost med tlakom in temperaturo (pri stalni prostornini) $p \propto T$ združimo v odvisnost $p \propto T/V$. To pomeni, da $pV/T = \text{const} = p_0V_0/T_0$. Upoštevamo še, da je pri stalnem pritisku in temperaturi prostornina plina sorazmerna z njegovo maso $V \propto m$, pa dobimo $pV/T = (m/m_0)p_0V_0/T_0$. Desno stran – količine z indeksom 0 – enkrat za vselej izmerimo in izračunamo ter dobimo za zrak

$$pV = mRT \tag{22.4}$$

s plinsko konstanto $R = 290\,\text{J/kgK}$. To je *plinska enačba* za zrak. Povezuje tri količine in pove, da je katerakoli od njih enolično določena s preostalima dvema. Enačba velja tudi za druge pline, recimo za vodno paro, le da je plinska konstanta zanjo drugačna, 460 J/kgK.

Plinska enačba vsebuje oba plinska zakona – $p \propto 1/V$ in $p \propto T$, saj je bila iz njiju izpeljana. Iz nje pa očitno sledi še tretji plinski zakon, namreč $V \propto T$. Poimenujemo ga *plinski izobarni zakon* (CHARLES). Pravzaprav bi mu morali reči izrek.

Redčenje zraka z višino

Plinska enačba nadalje pove, kako je gostota plina odvisna od tlaka in temperature: $p = \rho RT$. Ko to odvisnost vstavimo v enačbo za hidrostatični tlak kratkega zračnega stolpca $\mathrm{d}p = -\rho \mathrm{d}z$ in integriramo po višini, pri čemer predpostavimo, da je temperatura povsod enaka, dobimo

$$p = p_0 \exp \frac{-gz}{RT} \,. \tag{22.5}$$

Tlak pada z višino eksponentno, prav tako gostota. Na polovico pade pri $z_{1/2} = (RT/g)\ln 2$, kar pri stalni temperaturi 0 °C znese 5,5 km. Z barometrom torej lahko udobno izmerimo višino gore. Ker se temperatura ponavadi z višino spreminja (večinoma pada), upoštevamo njeno srednjo vrednost.

22.5 Raztezni koeficienti

Dolžinski raztezek

Kako bi s številom opisali, koliko se raztegne telo, če ga segrevamo? Kovinska palica dolžine l naj se raztegne za $\mathrm{d}l$, ko jo segrejemo za $\mathrm{d}T$. Dve taki palici, zaporedno sestavljeni, bi se raztegnili dvakrat toliko. Zato pričakujemo pri majhnih spremembah temperature sorazmernost

$$\frac{\mathrm{d}l}{l} = \alpha \, \mathrm{d}T \,. \tag{22.6}$$

S tem je definiran dolžinski razteznostni koeficient α trdnine. Poskus potrdi pričakovanje. Za baker, na primer, izmerimo razteznostni koeficient $17 \cdot 10^{-6}$/K. To pomeni, da se 1 m dolga palica, segreta od ledišča do vrelišča vode, raztegne za 1,7 mm. Koeficient je rahlo odvisen od temperature. Ko gradimo mostove iz kovinskih delov, je potrebno paziti na njihovo poletno raztezanje in zimsko krčenje.

Raztezanje kovin izkoristimo za merjenje temperature. Dva trakova iz različnih kovin, ki imata različna razteznostna koeficienta, položimo drugega na drugega in ju zakovičimo skupaj. Ko tak sestavljen trak segrevamo, se ukrivi: ena kovina se pač bolj širi kot druga. Vse skupaj opremimo s kazalcem in dobimo robusten *bimetalni termometer*. Pred uporabo ga umerimo s plinskim ali tekočinskim termometrom.

Prostorninski raztezek

Za prostorninsko raztezanje vseh vrst teles – trdnin, tekočin in plinov – velja podobno:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \beta\,\mathrm{d}T \tag{22.7}$$
$$\beta = 3\alpha\,.$$

Prostorninski razteznostni koeficient β določimo s poskusom. Za živo srebro dobimo $0{,}18 \cdot 10^{-3}$/K in za alkohol $1{,}1 \cdot 10^{-3}$/K. Alkoholni termometri so torej precej bolj občutljivi od živosrebrnih. Voda je nekaj posebnega: od ledišča do 4 stopinj se krči, nato pa razširja. To pomeni, da je pri tej temperaturi najgostejša in jo zato najdemo na dnu oceanov. Za pline pa lahko razteznostni koeficient kar izračunamo. Če namreč logaritmiramo in diferenciramo $V \propto T$, ugotovimo $\beta = 1/T$. Razteznostni koeficient plinov je torej hudo odvisen od temperature. Čim višja je temperatura, tem manjši je relativni raztezek plina.

22.6 Notranja energija, delo in toplota

Delo in notranja energija

Pri vrtanju lesa se sveder in les močno segrevata. Še bolj je to opazno pri vrtanju kovin, recimo bronastih topov. Predstavljamo si, da z drgnjenjem povečamo gibanje molekul, in to gibanje se kaže kot temperatura. Bolj nadzorovano raje mešamo vodo z lopatastim kolesom, ki ga poganja padajoča utež. Voda se pri tem segreva.

Slika 22.3 Mešalec za mehanično segrevanje vode, ki ga je uporabljal J. Joule. (Science Museum, London)

Poskus pokaže, da je prirast temperature ΔT v masni enoti m vode sorazmeren z delom $A = F_\mathrm{g} h$, ki ga opravi padajoča utež (JOULE):

$$cm\Delta T = F_\mathrm{g} h\,. \tag{22.8}$$

Sorazmernostni koeficient znaša $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ J/kgK in je približno stalen povsod med lediščem in vreliščem. Skoraj pol tone mora torej pasti za en meter, da se en liter vode segreje za eno stopinjo. Pri mešanju je vseeno, kako delo dovajamo: z lahko utežjo po dolgi poti, ali s težko utežjo po kratki poti, ali celo s spremenljivo utežjo preko ustreznih zaporednih poti. Vodi dovedeno delo A je s proglasom enako prirastu njene *notranje energije* ΔU:

$$\Delta U = A\,. \tag{22.9}$$

Sprememba tako definirane notranje energije se kaže preko spremembe temperature kot

$$\Delta U = cm\Delta T\,. \tag{22.10}$$

To pomeni, da je izguba potencialne energije uteži enaka povečanju notranje energije vode. Vsota potencialne in notranje energije sistema se ohranja.

Notranja energija in toplota

Voda v posodi se segreje tudi brez dovajanja dela, če jo le spravimo v stik s toplejšim telesom. Takrat rečemo, da je sprememba notranje energije enaka dovedeni *toploti* Q:

$$\Delta U = Q\,. \tag{22.11}$$

S tem smo toploto definirali in naredili merljivo preko spremembe notranje energije, ki je sama merljiva preko spremembe temperature. Toploto si predstavljamo kot molekularno delo: medtem ko mehansko delo opravljajo molekule z organiziranim gibanjem, opravljajo molekularnega z mrgolenjem. Za vodo, ki prejema tako delo kot toploto, pa sledi

$$\Delta U = A + Q\,. \tag{22.12}$$

To je *energijski zakon*. Za praktične potrebe poimenujemo $4{,}2\cdot 10^3$ J v 1 *kilokalorijo* (kcal). To je toliko energije, dovedene z delom ali toploto, da segreje 1 kg vode za 1 °C. Tisočkrat manjši enoti pa rečemo *kalorija*.

22.7 Specifična toplota

Mešanje tople in hladne vode

Ko zmešamo dve posodi vode, eno hladno in drugo toplo, se prva segreje in druga ohladi; obe dosežeta isto vmesno temperaturo. Izmerimo jo s termometrom ter ugotovimo, da je povečanje notranje energije pri prvi vodi enako njenemu zmanjšanju pri drugi. Notranja energija, kakor smo jo definirali, se torej ohranja. To je hkrati tudi potrditev, da je vzpostavljena temperaturna skala smiselna.

Toplotni stik

V hladno vodo vržemo vroč kos bakra. Oba dosežeta končno temperaturo. Ugotovimo (Blake)

$$c_1 m_1 \Delta T_1 = c_2 m_2 \Delta T_2 \tag{22.13}$$

(indeks 1 se nanaša na vodo in 2 na baker), s čimer je definirana in eksperimentalno določena specifična toplota c_2 bakra. Ta pove, koliko toplote je potrebno, da se masna enota obravnavane snovi segreje za temperaturno enoto. Specifično toploto vode že poznamo od prej. Bakru izmerimo 380 J/kgK in to je precej manj od vode. Visoka specifična toplota vode povzroča, da se morja segrevajo in ohlajajo počasi in ne tako hitro kot kamnita tla. Ob morjih je zato podnebje bolj milo – z manjšimi nihanji temperature zraka – kot v notranjosti kontinentov.

Delo tlaka

Doslej je prenos energije z delom in toploto potekal le med telesi, ki se jim pri tem ni znatno spremenila prostornina. Pri plinih je drugače: če niso zaprti v togi posodi, se raztezajo ali stiskajo. Ob tem iz okolice prejemajo ali vanjo oddajajo delo. Naj ima posoda obliko cilindra s premičnim batom preseka S, na katerega deluje z obeh strani sila F. Bat se naj premakne za ds. Tedaj znaša delo pri premiku $\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}s$ oziroma $A = \int F\,\mathrm{d}s = \int pS\,\mathrm{d}s = -\int p\,\mathrm{d}V$. Negativni predznak poskrbi, da je delo pozitivno, torej da ga plin prejema, kadar se mu prostornina zmanjša. Steno poljubne deformabilna posode z neelastičnimi stenami si predstavljamo kot množico majhnih batov, zato tudi zanjo velja

$$A_{\mathrm{exp}} = -\int p\,\mathrm{d}V\,. \qquad (22.14)$$

Izmenjava dela z okolico vpliva na zalogo notranje energije plina v posodi. Energijski zakon (22.12) se zato v primeru raztezanja snovi (in če ni drugega dela razen razteznega) zapiše kot

$$\Delta U = A_{\mathrm{exp}} + Q. \qquad (22.15)$$

Sprememba notranje energije je enaka do/odvedenemu razteznemu delu in do/odvedeni toploti. Kadar je sprememba prostornine majhna, kot pri vodi ali bakru, je raztezno delo zanemarljivo.

Stalna prostornina

Kadar je torej zrak zaprt v togi posodi, recimo bakreni, ni težav. Zrak in posodo skupaj obravnavamo kot neraztezen kos snovi. V mislih ga segrejemo, potopimo v hladno vodo in počakamo, da se temperature izenačijo. Toplota, ki jo oddata zrak in posoda, je enaka toploti, ki jo prejme voda. Ker poznamo specifični toploti vode in bakra, lahko izračunamo toploto, ki jo je oddal zrak, Q. Ta toplota je šla iz zaloge njegove notranje energije:

$$\Delta U = Q = mc_V\Delta T\,. \qquad (22.16)$$

S tem je določena specifična toplota zraka pri stalni prostornini, c_V. Ta pove, koliko toplote je potrebno do/odvesti masni enoti zraka, da se, zaprt v togi posodi, segreje/ohladi za temperaturno enoto. Žal pa je pri dejanskem poskusu masa vročega zraka tako majhna (~ 1 gram) v primerjavi z maso posode, da ne moremo zanesljivo določiti toplote, ki jo je zrak oddal, in zato tudi ne njegove vrednosti c_V.

Stalni tlak

Podobno obravnavamo vroč zrak v posodi, katere bat je pod stalnim zunanjim tlakom. Sedaj zrak – tako razmišljamo – pri ohladitvi odda okolici toploto Q, kar gre iz zaloge njegove notranje energije, ki pa se hkrati poveča z dovedenim delom, saj se zrak pri ohlajanju stisne. Ugotovimo

$$\Delta U + p\Delta V = Q = mc_p\Delta T\,. \qquad (22.17)$$

S tem je definirana specifična toplota zraka pri stalnem tlaku, c_p. Ta pove, koliko toplote je treba do/odvesti, da se masna enota zraka, zaprtega v raztezni posodi pod zunanjim tlakom, segreje/ohladi za temperaturno enoto. Žal tudi c_p ne moremo zanesljivo izmeriti zaradi premajhne mase zraka.

Ker $p\Delta V = mR\Delta T$, je notranja energija zraka odvisna zgolj od temperature $\Delta U = m(c_p - R)\Delta T$ in velja

$$c_p - c_V = R\,. \tag{22.18}$$

22.8 Stiskanje in raztezanje plina

Izotermno stiskanje

Ob povečanju ali zmanjšanju zunanjega tlaka se zrak stisne ali razpne. Pri počasnem stiskanju v neizolirani posodi se temperatura ne spreminja, zato pričakujemo, da se ne spreminja niti notranja energija. Vse dovedeno delo se sproti odda v okolico kot toplota. Rečemo, da je to *izotermno* stiskanje. Kolikšno pa je opravljeno delo $A = -\int p\,\mathrm{d}V$? Tlak med stiskanjem ni stalen, ampak velja $pV = p_0V_0$. Ko to upoštevamo, dobimo z integriranjem $A = p_0V_0 \ln(V/V_0)$. Stiskanje 1 litra zraka za faktor 10 torej proizvede 230 J toplote. S potrebnimi spremembami velja vse povedano tudi pri izotermnem raztezanju.

Adiabatno stiskanje

Če stiskamo zrak v dobro izolirani posodi, se v okolico ne oddaja nič toplote in se vse delo naloži v notranjo energijo. Rečemo, da je to *adiabatno* stiskanje: $p\mathrm{d}V = mc_V\mathrm{d}T$. Tlak izrazimo z enačbo stanja, nakar v dobljeni diferencialni enačbi ločimo spremenljivke ter integriramo:

$$TV^{\kappa-1} = \mathrm{const} \tag{22.19}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}\,.$$

Kot vemo, količin c_p in c_V še ne poznamo, zato κ ne moremo izračunati. Lahko ga pa izmerimo iz strmine grafa $\lg(T/T_0) = -(\kappa - 1)\lg(V/V_0)$. Za zrak dobimo $\kappa = 1{,}4$. Stisk na 1/10 prostornine ga segreje od 0 na 250 °C. Razteg na dvojno prostornino pa ga ohladi od 20 °C na −50 °C. In kolikšno je delo pri stiskanju? Tolikšno, kot je povečanje notranje energije: $A = mc_V(T - T_0)$. Pri omenjenem stisku 1 litra torej 230 J.

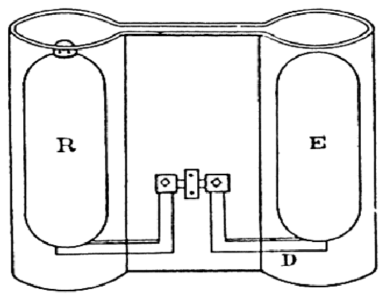
Iz enačb $\kappa = c_p/c_V$ in $c_p - c_V = R$, v katerih poznamo κ in R, zlahka izračunamo c_p in c_V. Za zrak dobimo $c_V = 720$ J/kgK in $c_p = 1010$ J/kgK. Druga vrednost je večja od prve, saj je treba zraku dovesti več toplote, da ga segrejemo za 1 stopinjo, če se pri tem razteza in del dovedene toplote zapravlja za opravljanje dela.

Adiabatna stisljivost

Stisljivostni modul plina K smo svoj čas [20.4] definirali z enačbo $\mathrm{d}p = K\mathrm{d}V/V$ in ga izračunali za izotermno stiskanje: $K = p$. Zdaj ga lahko izračunamo še za adiabatno stiskanje. Ugotovitev $TV^{\kappa-1} = \mathrm{const}$ z uporabo enačbe stanja preoblikujemo v obliko $pV^{\kappa} = \mathrm{const}$, logaritmiramo in diferenciramo, pa dobimo $K = \kappa p$. Adiabatni stisljivostni modul je torej za faktor 1,4 večji od izotermnega. S tem je pojasnjen tudi empirični koeficient v enačbi za hitrost zvoka (21.10). Slednjo lahko zdaj z uporabo enačbe stanja poenostavimo v obliko $c^2 = \kappa RT$. Hitrost zvoka je torej odvisna le od temperature.

Prosto razpenjanje

Zrak, stisnjen v posodi, lahko iz nje izpustimo skozi zaklopko v drugo, prazno posodo. Obe posodi skupaj obravnavamo kot en sam, toplotno izoliran sistem. Pri odprtju zaklopke se zrak sicer razširi; ker pa sta posodi togi, ne izmenjuje dela z okolico. Zato se notranja energija zraka ne spremeni. Pričakujemo, da se zato ne spremeni niti temperatura. Meritve to potrdijo, in sicer za ne preveč stisnjene pline do okrog 1 bara. Natančne meritve bolj stisnjenih plinov pa povedo, da se skoraj vsi plini (pri sobni temperaturi) ohladijo. Izjema sta helij in vodik, ki se segrejeta. Odkrijemo tudi, da za vsak plin obstaja določena *inverzijska temperatura*, pod katero se ohlajajo in nad katero se segrevajo. Ker je notranja energija sestavljena iz kinetičnih in potencialnih energij molekul, sklepamo, da ohlajanje pomeni pretvorbo kinetične v potencialno energijo, segrevanje pa obratno.



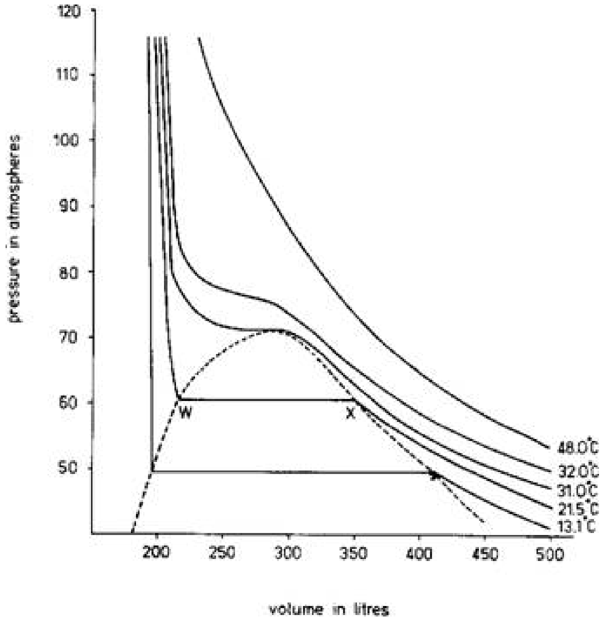
Slika 22.4 Prosto razpenjanje plina. Pod določeno temperaturo se plin ohlaja, nad njo segreva. (Joule, 1852)

Namesto zaklopke med dvema posodama lahko uporabimo tudi porozen čep, plin pa se pretaka skozenj zaradi razlike v tlakih na obeh straneh. Pri izbrani temperaturi je sprememba temperature sorazmerna z razliko pritiskov. Sorazmernostni koeficient je odvisen od temperature. Ogljikov oksid, na primer, se pri sobni temperaturi ohlaja za 1 K/bar.

22.9 Utekočinjanje plina

Utekočinjanje plina

Pri sobni temperaturi izotermno stiskajmo ogljikov oksid! Tlak plina se veča. Ko doseže nasičeno vrednost, se začne kondenzirati v tekočino. Tlak se ne spreminja, dokler se ne utekočini ves plin. Pri utekočinjanju se sprošča toplota, ki odteka v okolico. Podobno utekočinimo tudi klor. Nikakor pa pri sobni temperaturi ne moremo s stiskanjem utekočiniti zraka. Morda bi lahko to storili pri nižji zunanji temperaturi? Morda je sploh tako, da lahko plin s stiskanjem utekočinimo le pri temperaturi, ki je manjša od neke *kritične temperature*, značilne za vsak plin posebej?



Slika 22.5 Kritična izoterma ogljikovega oksida in nekaj sosednjih izoterm. (Andrews, 1869)

Kritična temperatura

Domnevo preverimo kar na ogljikovem oksidu. Res je: ko ga stiskamo pri temperaturah nad 31 °C, se noče več utekočiniti, ampak postaja le čedalje bolj gost. To je njegova kritična temperatura. Tlak, ki je potreben za kondenzacijo plina tik pod kritično temperaturo, poimenujemo kritični tlak. Za ogljikov oksid znaša 73 bar. Za klor sta merodajni vrednosti 144 °C in 76 bar, za vodno paro pa 374 °C in 217 bar. Kritično temperaturo in ustrezni tlak poimenujemo skupaj *kritično stanje*. V tem stanju postane površinska napetost enaka nič.

22.10 Talilna, izparilna in sežigna toplota

Taljenje ledu

Kako pa je s toploto pri faznih spremembah snovi? Vemo, da led za taljenje potrebuje dovod toplote, vendar se mu pri tem temperatura nič ne spreminja. V vrelo vodo vržemo kos ledu z maso m, ko se je ravno začel taliti, in počakamo, da se stali ter da dobi vsa voda isto temperaturo. Iz toplotne bilance ugotovimo, da je za taljenje potrebna toplota

$$Q = q_{\mathrm{t}} m\,, \tag{22.20}$$

s čimer je definirana *talilna toplota* ledu q_{t}; ta znaša $330 \cdot 10^3$ J/kg. Kilogram ledu potrebuje torej za stalitev toliko toplote, kot je je potrebno za segretje kilograma vode za 80 °C. Ko enkrat to toploto poznamo, lahko taljenje ledu uporabimo za merjenje dovedene toplote.

Slika 22.6 Kalorimeter – merilnik toplote. Prikazan je prvi kalorimeter na led, ki ga je uporabljal A. Lavoisier. (Musee des Arts et Metiers, Pariz)

Srečo imamo, da je talilna toplota ledu tako velika. Če bi bila recimo desetkrat manjša, bi vsako pomlad, ko se tali sneg, doživeli hude poplave.

Vretje vode

Podobno je pri izparevanju vode, segrete do vrelišča. Pokrit lonec vode pri sobni temperaturi začnemo segrevati s plinskim gorilnikom. Iz porasta temperature določimo, kolikšen je dotok toplote na časovno enoto. Ko začne voda vreti, pokrov odstranimo. Privzamemo, da ostaja dovod toplote nespremenjen in s tehtnico izmerimo, za koliko se zmanjša masa lonca z vodo v časovni enoti, to je, kolikšna je masa m izparele vode. Dobimo

$$Q = q_\mathrm{i} m \,. \qquad (22.21)$$

S tem je definirana *izparilna toplota* vode q_i; znaša $2{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{J/kg}$. Za izparitev kilograma vode pri vrelišču je torej potrebno 8-krat toliko toplote kot za stalitev kilograma ledu pri ledišču. Meritev je dokaj nenatančna.

Voda ne izpareva le pri vrelišču, ampak izhlapeva tudi pri nižjih temperaturah. Tudi za to je potrebna izparilna toplota, ki je skoraj neodvisna od temperature. Zaradi izhlapevanja se voda in njena okolica ohlajata. Z mokrim blagom ovita čutara vode ostaja zato hladna. Prebivalci vročih in suhih krajev pa shranjujejo vodo v poroznih glinenih vrčih. Ko pridemo mokri iz vode, nas zebe. In ko je vroče, nas hladi izhlapevajoč znoj. Izhlapela para je očem nevidna, tako kot zrak. Tisto, kar se pri vretju dviga iz lonca, so drobne kapljice, v katere se je para kondenzirala ob ohlajanju.

Sežiganje goriv

Toploto pridobivamo s sežiganjem goriv. Nastala toplota je sorazmerna z maso goriva:

$$Q = q_\mathrm{s} m \,. \qquad (22.22)$$

Sorazmernostni koeficient poimenujemo *sežigna toplota*. V njej je všteta tudi izparilna toplota pri gorenju nastale vode, tipično okrog 10 %. Pri kurjenju ta del toplote seveda izgubimo. Sežigna toplota za suh les znaša 4000 kcal/kg, za črni premog 8000 kcal/kg in za bencin 10 000 kcal/kg. V kilogramu goriva nakopičena toplotna energija je zelo velika. Za skoraj vsako gorivo je večja od potencialne težne energije enake množine snovi na višini 1000 km!

V naših telesih neprestano gori hrana. Sladkor, škrob in beljakovine dajejo po 4 kcal/g, olje in mast pa po 9 kcal/g. Na dan potrebuje sedeč človek okrog 2500 kcal, pri zelo težkem delu, recimo pri podiranju drevja, pa dvakrat toliko.

22.11 Parni tlak tekočin

Meritev parnega tlaka

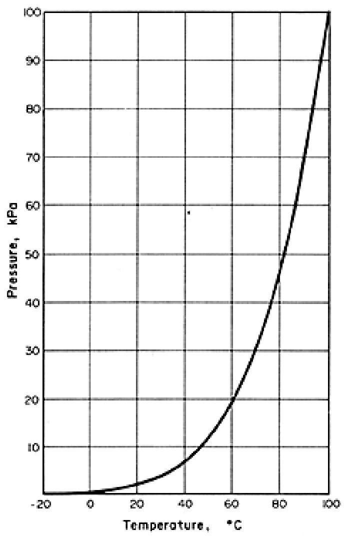
Nad vodno gladino je v zraku zmeraj nekaj vodne pare. Ko v odprti posodi segrejemo vodo do vrelišča, nastajajoča para odpihne zrak in nad gladino preostane le para. Ta je pod tlakom zunanjega zraka, torej 1 bar. Posodo zapremo, da zrak ne more več vanjo, in jo počasi ohlajamo. Sproti merimo temperaturo in tlak. S padanjem temperature pada tudi tlak. Očitno se para sproti kondenzira v vodo. Nato merimo obe količini pri segrevanju: tlak raste, para nastaja. Odvisnost med temperaturo in tlakom je enolična: dani temperaturi T ustreza natanko en tlak p_s; količina pare nad gladino je omejena. Rečemo, da je takrat para *nasičena*. Pridruženi temperaturi pa rečemo *rosišče*.

Enačba parnega tlaka

Iz meritev ugotovimo, da je $\ln(p_s/p_0)$ sorazmeren z $1/T$, določimo nagib premice ter ga poskušamo izraziti z že znanimi količinami. Vemo, da mora imeti sorazmernostni koeficient enoto K (kelvin) in da prideta v poštev izparilna toplota q_i ter plinska konstanta R za vodo. Pravo dimenzijo ima njun kvocient. Ko ga izračunamo, vidimo, da ima tudi pravo številčno vrednost. Dobimo povezavo (CLAUSIUS)

$$p_s = p_0 \exp \frac{q_i}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) . \tag{22.23}$$

Konstanti T_0 in p_0 znašata 373 K in 1 bar. Vodo v zaprti posodi lahko segrevamo preko 100 °C. Pri 200 °C naraste tlak na 15 bar.



Slika 22.7 Nasičeni parni tlak vode. Izračunan. Tlak je podan v "kilopascalih": 1 kilopascal znaša 10^{-2} bar. Pri 100 °C znaša tlak 1 bar in pri 0 °C pade na 6 milibarov. (Institute for Food Science, New Zealand)

Vrelišče in tlak

Odvisnost nasičenega parnega tlaka od temperature, pogledana z nasprotne strani, pomeni odvisnost vrelišča od zunanjega tlaka. Ko v odprti posodi segrevamo vodo, ta navadno zavre pri 100 °C, saj je zunanji tlak navadno 1 bar. Če bi kuhali na visoki gori, kjer je tlak manjši, bi pa voda vrela pri nižji temperaturi. Kuhanje v odprti posodi ne bi bilo več učinkovito. Gorniki zato kuhajo v zaprtih posodah z ventilom za uravnavanje tlaka. Seveda velja vse povedano tudi za druge snovi, ne le za vodo.

Gorniške izkušnje pokažejo novo, presenetljivo uporabo kuhanja. Na vrhu gore segrevamo vodo v odprtem loncu. Ko voda zavre, je njen parni tlak enak zračnemu tlaku. Izmerimo temperaturo in iz nje izračunamo ustrezni tlak (22.23). Potem pa iz povezave med zračnim tlakom in višino (22.5) določimo višino gore. Tako gore ni treba meriti z barometrom, ampak za to uporabimo kar termometer!

22.12 Vlažni zrak

Mešanica plinov

V okolju s stalno temperaturo imejmo dve enako veliki togi posodi; v prvi naj bo zaprt dušik pri tlaku p_1 in v drugi kisik pri tlaku p_2. Povežimo posodi z ventilom ter z batom izotermno potisnimo vsebino druge posode v prvo (ali prve v drugo). Priključeni manometer pokaže, da se je tlak povečal na

$$p = p_1 + p_2 \,. \tag{22.24}$$

To pomeni, da vsak plin v mešanici izvaja enak tlak, kot bi ga, če drugih plinov ne bi bilo, skupni tlak pa je enak vsoti *delnih tlakov* (DALTON). Vsak plin zase in vsi plini skupaj se pokoravajo ustreznim enačbam stanja.

Vlažnost zraka

Povedano velja tudi za vodno paro v zraku. Koliko je je, bomo opisali z gostoto $\rho_\mathrm{v} = m_\mathrm{v}/V$ in rekli, da je to *absolutna vlaga*. Aktualna gostota pare je manjša ali kvečjemu enaka nasičeni; tvorimo njuno razmerje in dobimo *relativno vlago*:

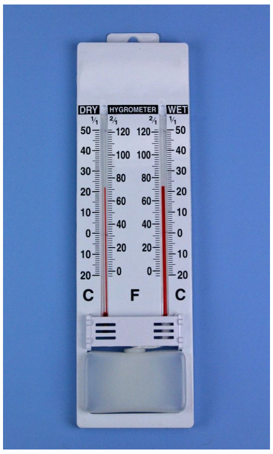
$$f = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{vs}} = \frac{p_\mathrm{v}}{p_\mathrm{vs}} \,. \tag{22.25}$$

Podajali jo bomo v odstotkih med 0 in 100 %. Masi pare na masno enoto vlažnega zraka pa bomo rekli *specifična vlaga*:

$$r = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho} = \frac{R}{R_\mathrm{v}} \frac{p_\mathrm{v}}{p} \,. \tag{22.26}$$

Psihrometer

Kako naj vlago izmerimo? Merjeni zrak naj ima neznano specifično vlago r in znano (izmerjeno) temperaturo T. S primernim ventilatorjem ga potiskajmo skozi vlažno krpo, kjer postane nasičeno vlažen, r_s. Iz krpe izhlapi ustrezna količina vode. Za to potrebna izparilna toplota ohladi zrak na T'. To temperaturo izmerimo s termometrom, vtaknjenim v krpo (pravzaprav je krpa ovita okrog bučke temometra). Vse poteka pri stalnem tlaku. Velja $q_\mathrm{i} \cdot (r_\mathrm{s}(T') - r) = c_p \cdot (T - T')$, iz česar izračunamo r, saj so vse druge količine poznane. Za merjenje vlage sta torej potrebna dva termometra – suhi in mokri – ter ventilator. Celotno sestavo imenujemo *psihrometer*.



Slika 22.8 Psihrometer – merilnik vlage v zraku. Sestavljen je iz dveh termometrov. Bučka desnega je ovita z mokro krpo. Temperaturna skala je podana v stopinjah Celzija in v stopinjah Fahrenheita. (Avogadro's Lab Supply)

Higrometer

Merjenje s psihrometrom je okorno. K sreči odkrijemo, da se človeški lasje raztezajo, če se vlaga v zraku veča, in krčijo, če se manjša. Pramen las napnemo na okvir, ga opremimo s kazalcem ter dobimo *higrometer*, ki kaže relativno vlago. Umerimo ga s psihrometrom.

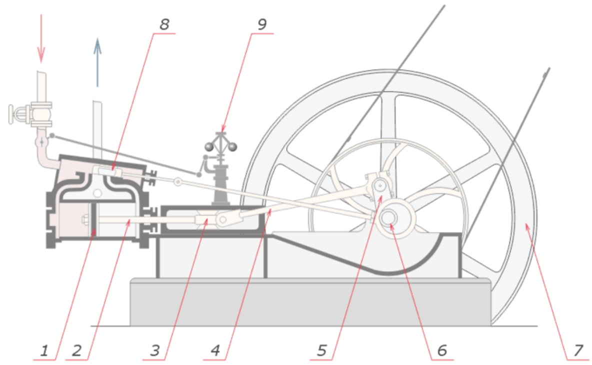
Meritve zraka v Ljubljani pokažejo, da znaša relativna vlaga ob dveh popoldne, ko je navadno najbolj vroče, okrog 60 %, poleti četrtino manj in pozimi četrtino več. Zjutraj in zvečer je ustrezno večja. Kadar dežuje, pa znaša, pričakovano, 100 %. Ko je vroče, je bolje, če je relativna vlaga nizka, saj je tedaj izhlapevanje znoja močnejše in hlajenje učinkovitejše.

22.13 Parni stroj

Ko kuhamo vodo v loncu, nastajajoča para s svojim tlakom privzdiguje pokrov. To nas navede na misel, da bi silo pare izkoristili za opravljanje dela.

Način delovanja

Osnovna zamisel za željeni *parni stroj* je naslednja (Watt). Paro proizvajamo v kotlu z vodo, pod katerim kurimo, in jo po cevi, parovodu, vodimo iz njega. Zraven kotla stoji vodoraven valj s premičnim batom. Valj ima na vsaki strani zaklopko. Vsaka zaklopka ima dva položaja: v enem je povezana s parovodom in v drugem z odvodno cevjo. Ko je bat v skrajno desni legi, se desna zaklopka poveže s parovodom in leva z odvodno cevjo. Dotekajoča stisnjena para porine bat v levo. Ko je bat v skrajno levi legi, pa se leva zaklopka poveže s parovodom in desna z izpušno cevjo. Bat porine v desno. To se ponavlja. Gibanje bata se preko križnega drsnika prenaša na gonilno kolo. Os tega kolesa premika povratni drog, ki krmili obe zaklopki, da se pravilno preklapljata. To je povratna zveza: bat krmili sam sebe. Raztegnjena in ohlajena para potuje po odvodni cevi skozi dimnik na prostost. Lahko pa teče v hlajeno posodo, kjer se kondenzira, črpalka (ki jo poganja gonilno kolo) pa prečrpa nastalo vodo nazaj v kotel.



Slika 22.9 Parni stroj. 1 = bat. 3 = križni drsnik. 7 = vztrajnik. 8 = premična zaklopka. 9 = centrifugalni regulator. (Anon)

Pomembne podrobnosti

Za dobro delovanje stroja je potrebnih precej domiselnih podrobnosti. — Toploto goriva bolje ujamemo tako, da vroče pline iz kurišča vodimo po razvejanih ceveh skozi kotel in nato v dimnik. — Da para ne raznese kotla, ga opremimo z varnostnim ventilom. — Hitrost delovanja nastavljamo s centrifugalnim regulatorjem: gonilno kolo vrti dvojico uteži na visečih ročicah okrog navpične osi, njun dvig zaradi centrifugalne sile pa preko vzvodov uravnava pretok pare. — Gonilno kolo mora biti težko, da deluje kot vztrajnik; tedaj premaguje mrtve točka bata in zagotavlja, da se ta giblje čim bolj enakomerno. — Zaradi gibanja bata se premika težišče stroja sem in tja; izničimo ga z ustrezno utežjo na robu vztrajnika. — Večjo moč dosežemo z zaporedno vezavo več valjev (odvodna cev prvega valja postane vhodna cev drugega, večjega) ali z njihovo vzporedno vezavo na isto os.

Področja uporabe

Parni stroj prinese revolucijo v industrijo in promet. V rudnikih poganja vodne črpalke in v tovarnah tekstilne stroje. Ni več potrebno, da gradimo tovarne ob rekah. Postavimo stroj na ladjo in dobimo parnik na lopatasto kolo ali na vijak! Ni se več potrebno zanašati na gonilno silo vetra. Postavimo stroj na voz na tirih in dobimo parni vlak! Parnik in vlak zmanjšata svet. Za pogon vozov po cestah pa je stroj preneroden in pretežek.

Moč in izkoristek

Tipičen stroj poganja para s tlakom 10 barov. Kotel kurimo s premogom. Stroji oddajajo moč med 10 HP (traktor), 10^3 HP (lokomotiva) in 10^4 HP (čezoceanski parniki). Razmerje med oddanim delom in sežgano toploto – *izkoristek* – je majhen, pod 10 %. In vsi stroji so zelo težki: razvijajo moč okrog 10 HP na tono.

Moč stroja merimo neposredno z dviganjem bremena. Bolj preprosto pa je, če na os nataknemo obroč in ga tesno stisnemo. Obroč se podaljšuje v ročico, na katero obesimo primerno utež. To je *navorni jarem*. Ko se os stroja zavrti, se ročica postavi v neko lego, ki je odvisna od tega, kako krepko je obroč stisnjen. Pri enakomernem vrtenju osi je vsota navorov nanjo enaka nič;

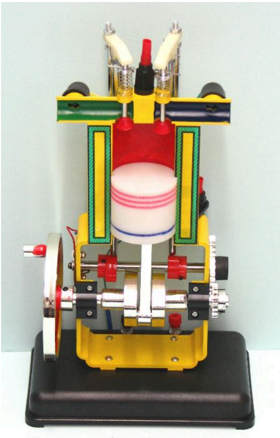
navor stroja je torej enak navoru sile trenja, ki pa je enak navoru uteži. S tem je sila stroja določena. Če izmerimo še frekvenco vrtenja osi, poznamo tudi njeno obodno hitrost in s tem moč stroja, saj $P = A/t = Fs/t = Fv$.

22.14 Eksplozijski motor

Namesto da bat potiska vodna para, bi to lahko opravil segret in napet zrak. Pravzaprav ni treba, da bi zrak segrevali zunaj delovnega valja, ampak lahko to naredimo kar znotraj, in sicer tako, da mu primešamo primerno tekoče gorivo, ter ga zažgemo. Izgorele pline pa spustimo kar na prosto. To je vodilna zamisel za *eksplozijski motor*.

Opis delovanja

Domišljen eksplozijski motor s kompresijskim vžigom deluje takole (DIESEL). — Navpični delovni valj z batom ima na vrhu dve zaklopki in šobo za vbrizg plinskega olja [11.6]. Ena zaklopka ureja dotok svežega zraka in druga odtok izgorelih plinov. Gibanje bata poteka v naslednjih taktih. — Ko je bat na vrhu, se dotok odpre in iztok zapre. Pri gibanju navzdol bat vsesava sveži zrak. — Ko bat doseže dno, se dotok zapre. Pri dviganju bat stisne zrak na majhen del prvotne prostornine, tipično na 1/15. Zrak se zato močno segreje. — Šoba vbrizga nekaj kapljic goriva, ki se takoj vžge. Nastali plini potisnejo bat navzdol. — Ko bat doseže dno, se odpre odtok. Dvigajoči bat iztisne izgorele pline. Nato se postopek ponovi. Kako se zaklopke odpirajo in kdaj šoba brizga, določa vrtilna gred preko povratnih vzvodov. Kritični del stroja je črpalka, ki mora skozi šobo pod velikim tlakom in v kratkem hipu izbrizgati natančno količino goriva. Motorja ne moremo zagnati z roko, ker je ciljni tlak prevelik, ampak uporabimo predhodno stisnjen zrak.

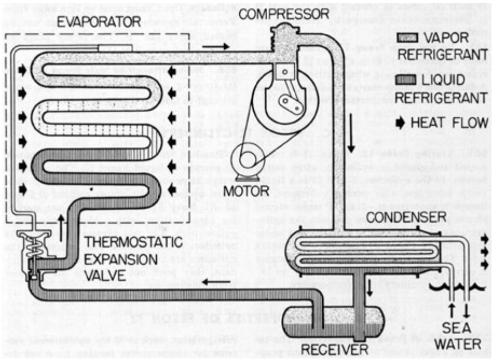


Slika 22.10 Model eksplozijskega motorja. (Lab Connections)

Opisani motor, recimo mu kar naftni, ima izkoristek 50 % in 10-krat boljše razmerje med močjo in težo kot parni stroj. V tekmovalno naravnanem svetu zato slednjega popolnoma izrine. Izkaže se, da je primeren tudi za pogon vozil po cestah, avtomobilov. S tem vzpodbudi silovit razmah avtomobilske in naftne industrije.

22.15 Hladilni stroj

Če prenehamo kuriti pod kotlom parnega stroja, bo ta še nekaj časa deloval, potem pa se bo ustavil. Pa poganjajmo bat naprej z zunanjo silo! Potem bo bat srkal paro iz kotla, voda v kotlu bo izhlapevala in se zato hladila. Posrkano paro bo bat tlačil naprej v kondenzator, kjer se bo delno utekočinila. Prej ali slej bo voda v kotlu postala hladnejša od tiste v kondenzatorju. Stroj bo torej z dovajanim delom črpal toploto iz hladnega v toplo področje. To je osnovna zamisel za *hladilni stroj*.



Slika 22.11 Hladilnik na izparevanje amoniaka. (Navpers, 1945)

Opis delovanja

Praktični hladilni stroj (LINDE) uporablja amoniak, ki ima pri tlaku 1 bar vrelišče −33 °C, hitreje izhlapeva ter močneje hladi od vode. Primeren je tudi ogljikov oksid. Notranjost hladilne komore je obdana s cevjo, v katero curlja tekoči amoniak, izhlapeva in hladi vsebino komore. To je izparilnik. Amoniakove pare srka kompresor (ki ga vrti naftni motor) in jih stiska v kondenzator na zunanji strani komore. Tam se pare kondenzirajo, nastala toplota pa oddaja v okolico. Izhodna cev iz kondenzatorja je opremljena s šobo, ki spušča tekoči amoniak naprej v izparilnik. Na vhodni strani šobe je tlak visok in na izhodni je nizek. S tem je krogotok sklenjen. Pretok skozi šobo uravnava zaporna igla, ki jo krmili batni plinski termoskop v komori. Takšni hladilniki zlahka dosegajo temperature do −10 °C. V njih shranjujemo hrano in delamo led.

Nizke temperature

Kako bi ohladili zrak še bolj? Morda celo pod njegovo kritično temperaturo, ko ga s stiskanjem lahko utekočinimo? Pomaga nam prosto razpenjanje: zrak zapovrstjo stiskamo, ohlajamo in prosto razpenjamo; pri tem že ohlajeni zrak hladi dotekajočega. Za stiskanje uporabimo zračni kompresor, ki ga vrti naftni motor. Po več ponovitvah dosežemo kritično temperaturo in tlak za kisik (−130 °C, 51 bar) ter ga utekočinimo. Postopek lahko peljemo naprej in utekočinimo še dušik.

22.16 Konvekcija

Dimnik

Ko kurimo, ogenj segreva zrak; ta se – pomešan z izgorelimi plini in dimom – razpenja, njegova gostota se zmanjša in zaradi vzgona se začne dvigati. Dim je moteč, zato so se ga ljudje že zdavnaj naučili odvajati po cevi – iznašli so dimnik. Pri tem so odkrili, da tak dimnik "vleče", to je, da ogenj pod njim močneje gori. Podobno je pri svetilki na petrolej, ki bolje sveti, če jo obdamo s steklenim valjem. Kako si to razložimo?

Zrak v dimniku višine h naj ima temperaturo T' in gostoto ρ', zunanji zrak pa T in ρ. Na vrhu dimnika je notranji tlak enak zunanjemu. Notranji tlak se do tal poveča za $\rho' gh$ in zunanji za ρgh. Razlika teh dveh tlakov potiska zrak v dimnik in je enaka gostoti kinetične energije, ki jo zrak pridobi. S tem je določena tudi hitrost dotekanja in s presekom dimnika S še prostorninski tok: $\Phi_V = S\sqrt{(2gh\Delta T/T)}$. Višji in bolj vroč dimnik bolj vleče.

Nevihtni oblak

Poleti čez dan Sonce močno segreje nekatere zemeljske površine, recimo južna pobočja gora. Zrak nad njimi se ogreje bolj kot zrak v okolici, se zredči in zaradi vzgona začne dvigati. Pri tem se razteza, ker prihaja v območja čedalje nižjega tlaka, in zaradi tega tudi adiabatno ohlaja. Nastane navzgor usmerjen tok zraka, vzgornik. Razredčino, ki nastaja pri tleh, pa sproti zapolnjuje spuščajoči se okolišnji zrak. To je *ozračna konvekcija*.

Kako se ohlaja dvigajoči se zrak? — Energijski zakon (22.15) pove $\mathrm{d}Q = mc_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$. Plinsko enačbo (22.4) diferenciramo in dobimo $p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = mR T$. Izraz $p\mathrm{d}V$ iz druge enačbe vstavimo v prvo enačbo, upoštevamo povezavo (22.18) $c_p - c_V = R$, delimo z maso ter dobimo energijski zakon v "meteorološki" obliki $\mathrm{d}q = c_p\mathrm{d}T - \mathrm{d}p/\rho$. Hidrostatična enačba (10.2) se z diferenciali zapiše kot $\mathrm{d}p = -g\rho\mathrm{d}z$. Izraz za $\mathrm{d}p$ vstavimo v energijsko enačbo, postavimo še $\mathrm{d}q = 0$ in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{g}{c_p}. \qquad (22.27)$$

Številčno to znaša 10 K/km.

Na višini, kjer se vzgornik dovolj ohladi, se začne vodna para v njem zgoščevati v oblačne kapljice. Nastane kopast oblak, *kumulus*. Kapljice so zelo drobne in tok jih nosi s seboj. Pri kondenzaciji se sprošča toplota in vzgornik se zato z višino ohlaja počasneje, kot bi se sicer. Para je tako rekoč gorivo, ki ga poganja. Oblak raste vse dotlej, dokler je njegova temperatura višja od temperature okolice. V "ugodnih" razmerah zraste preko 10 km višine in se ohladi pod −50 °C. To je nevihtni oblak, *kumulonimbus*. Kapljice v njem rastejo zaradi kondenzacije pare in trkov ter zmrzujejo. Ko padavinski delci postanejo dovolj težki, jih vzgornik ne more več prenašati in izpadejo kot dež ali toča.

Slika 22.12 Nevihtni oblak. (Anon)

Ozračna konvekcija meša prizemno plast zraka, prenaša toploto in ustvarja navpični profil temperature. V povprečnem ozračju na zmernih zemljepisnih širinah pada temperatura z nadmorsko višino od 15 °C (0 km) do −50 °C (10 km), to je z gradientom 6,5 °C/km, nakar se ustali. Profil izmerimo s termometrom in z barometrskim višinomerom na dvigajočem se balonu.

22.17 Toplotni vetrovi

Toplotni vetrovi

Podnevi se kopno znatno segreje, morje pač ne. Nad kopnim se zato razvije konvekcija, ki jo pri tleh zapolnjuje okolišnji zrak: z morja na kopno začne pihati morski veter, ki ga cenijo dopustniki in jadralci. Ponoči se pa kopno ohladi močneje kot morje in pihati začne kopni veter.

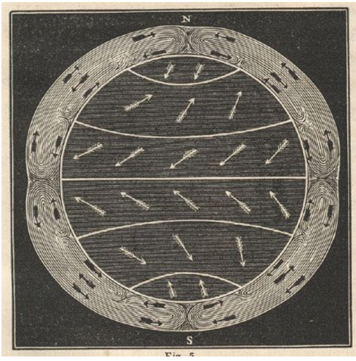
Isti pojav opazimo tudi pri večjih razmerah. Poleti se kopenska Sibirija segreje in iz Indijskega oceana začne proti njej preko indijske podceline pihati topel, z vlago nasičen morski veter, vlažni monsun. Ta zadene ob gorsko pregrado Himalaje, se ob njej prisilno dviga, ohlaja in s padavinami napaja velike reke. Pozimi pa se Sibirija ohladi in iz nje začne proti Indijskemu oceanu pihati kopenski veter, suhi monsun.

Planetarni vetrovi

Ob ekvatorju je konvekcija posebno močna in obsežna. Pri tleh bi jo morali zapolnjevati vetrovi s severa in juga, v višinah pa bi se zrak moral raztekati proti obema poloma. Vendar se zaradi vrtenja Zemlje in s tem povezane odklonske sile na severni polobli vetrovi obračajo v desno in na južni v levo. Zemlja je tako velika in se tako hitro vrti, da prizemni vetrovi ne morejo priti prav od daleč, preden se obrnejo povsem proti zahodu. Pridejo lahko le iz zemljepisne širine 30°. Na severni strani ekvatorja zato nastane prizemni pas severovzhodnih vetrov, pasatov, ki so ugodni za potovanje trgovskih jadrnic proti zahodu. V višinah pa pihajo jugozahodni vetrovi. Na južni strani ekvatorja so razmere zrcalno simetrične. Ko višinski vetrovi dosežejo širino 30°, se spuščajo, da zapolnijo prostor, ki ga praznijo pasati. Tako je krog sklenjen. Spuščajoči zrak se stiska, segreva in relativna vlažnost se mu manjša. Tako ustvarja pas puščav.

Razmere na polih so obratne. Glejmo le severni pol. Tam je površina hladna, zrak nad njo se hladi, spušča in razliva proti ekvatorju. Zaradi odklonske sile se usmerja proti zahodu in do širine 60° ustvari prizemni pas severovzhodnih vetrov. Tam se začne zrak dvigati, da zapolni praznino, ki jo ustvarjajo višinski jugozahodni vetrovi. Dvigajoči zrak se razteza, ohlaja in relativna vlaga se mu viša. Tako ustvarja pas oblačnega vremena. Razmere na južni polobli so zrcalno simetrične.

Med obema velikima konvektivnima celicama – ekvatorsko in polarno – pihajo pretežno zahodni vetrovi, tako nižinski kot višinski, in pri tem valovijo proti severu in jugu ter tako prenašjo toploto v poldnevniški smeri. To je pas spremenljivega vremena. Uporabljajo ga trgovske jadrnice za potovanja proti vzhodu.



Slika 22.13 Planetarni vetrovi. Povzročata jih Sončevo segrevanje in vrtenje Zemlje. Prikazano je gibanje zraka v tlorisu in v navpičnem prerezu. (Ferrel, 1860)

Ozračje je torej ogromen toplotni stroj, ki ga poganja sončno segrevanje, njegove gibljive dele – vetrove – pa urejata vrtenje Zemlje in fazne spremembe vode. Ko vetrovi pihajo nad oceani, v njih ustvarjajo morske tokove. Gibanje tokov se dobro ujema z gibanjem vetrov. Ujemanje pa ni popolno, ker lahko vetrovi nemoteno pihajo okrog Zemlje, tokove pa zaustavljajo celinske pregrade.

22.18 Toplotni tok

Toplotni tok

Kakršnekoli že toplotne spremembe doživlja sistem, vse so povezane s toplotnimi tokovi skozi njegovo površino. Če je okolica bolj topla kot sistem, potuje notranja energija okolice, kot toplota, navznoter in obratno. Predstavljamo si, da bolj "vroče" molekule, ki se hitreje gibljejo, prenašajo svoje gibanje manj vročim, počasnejšim. Čim več toplote je dovedeno opazovanemu sistemu na časovno enoto, tem večji je *toplotni tok* vanj; definiramo ga kot

$$P = \frac{Q}{t} \, . \qquad (22.28)$$

Gostota toka

Ko tok preračunamo na pravokotno postavljeno ploskovno enoto, dobimo *gostoto (toplotnega) toka*:

$$j = \frac{P}{S} \, . \qquad (22.29)$$

Toplotna prevodnost

Bolj ko je mrzlo, debelejšo obleko nosimo, da nas ne zebe. Očitno je tok toplote od toplega k mrzlemu telesu skozi vmesno pregrado odvisen od njune temperaturne razlike ΔT in od debeline l pregrade, pa tudi od snovi, iz katere je narejena. Ustrezni poskusi potrdijo, da velja:

$$j = \lambda \frac{\Delta T}{l} \,. \tag{22.30}$$

Sorazmernostni koeficient je odvisen od vrste snovi; poimenujemo ga *toplotna prevodnost*. Določimo ga s poskusom. Za baker, recimo, uporabimo bakreno cev znane debeline in dolžine; skoznjo vodimo paro, od zunaj pa cev hladimo z ledom ter merimo, koliko se ga stali v časovni enoti. Toplotna prevodnost bakra znaša 390 W/Km. Za vodo izmerimo dva reda velikosti manj, 0,6 W/Km, in za zrak še red manj, 0,03 W/Km. Zdaj vemo, zakaj moramo v hudem mrazu nositi volnena oblačila: polna so zračnih žepkov. Pri prevajanju toplote skozi tekočino in plin velja zapisani zakon le, če snov miruje, to je, če ni konvekcije.

Toplota in bitja

Toplokrvne živali (ptiči in sesalci) vzdržujejo stalno telesno temperaturo. Pri živali z dolžino l je proizvodnja toplote sorazmerna s prostornino, torej $P_{\mathrm{gain}} \propto l^3$, oddajanje toplote pa je sorazmerno s površino, torej $P_{\mathrm{loss}} \propto l^2$. Z večanjem ali manjšanjem živali se spreminja razmerje med proizvodnjo in izgubo toplote: $P_{\mathrm{loss}}/P_{\mathrm{gain}} \propto 1/l$. Majhna žival oddaja večji delež toplote kot velika žival, zato mora relativno več jesti: rovka na dan poje za svojo lastno težo hrane, slon pa le okrog 5 %.

Majhna toplokrvna žival živi hitreje, plodi se hitreje in umira hitreje. Ni ptic in sesalcev tako majhnih, kot so lahko žabe in ribe: niti ne morejo dobiti, niti prebaviti vse potrebne hrane. Kolibri je ujetnik svojega telesa: jesti mora nenehno. Toplotna izguba je še posebej kritična na polih in v morju. Sever je dom velikih ptic, ne majhnih. Ni majhnih sesalcev v morju. Najmanjši delfini živé v toplih morjih.

Tudi oblika telesa je pomembna: okrogla telesa imajo relativno manjšo površino kot podolgovata. V mrzlem okolju imajo zato čokate živali prednost pred vitkimi, saj bolje ohranjajo toploto. V toplem okolju pa je ravno obratno: hitreje se pregrevajo. To velja tudi za ljudstva. □

23 Molekule

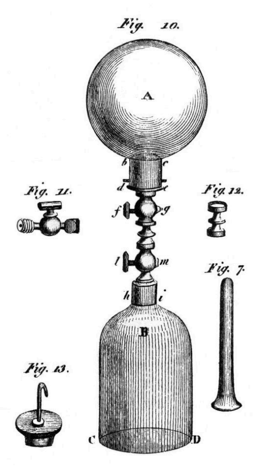
Tehtanje plinov – Reakcijska razmerja – Molekule v plinih – Molekule v gosti snovi – Valenca atomov – Velikost molekul – Kilomol in kilomolska masa – Splošna plinska konstanta – Raztopine – Osmozni tlak – Reakcijske enačbe – Ravnotežje reakcij

23.1 Tehtanje plinov

Analiza snovi temelji na tehtanju. Pri trdninah in tekočinah ni kakšnih hudih težav. Pogosto pa je treba tehtati pline, ujete pod steklenim zvonom v vodni ali živosrebrni kadi. Tedaj postopamo takole.

Merilni balon

Tog in lahek balon, opremljen z ventilom, čimbolj izčrpamo, zapremo in stehtamo. Na vrhu zvona, ki je v kadi in pod katerim je ujet plin, je priključek z zaprtim ventilom. Nanj nasadimo balon. — Zvon počasi znižamo ali zvišamo, da se gladina vode v njem izravna z zunanjo gladino v kadi. Temperatura T in pritisk p ujetega plina se pri tem izenačita z okolišnjimi vrednostmi. Na zvonu je vrisana skala in iz nje razberemo prostornino V plina. — Odpremo oba ventila, zvonov in balonov, in voda potisne ujeti plin v balon. Z dviganjem oziroma spuščanjem zvona poskrbimo, da se gladina vode dvigne natanko do balonovega ventila, to je, da je ves zrak potisnjen iz zvona. — Balon zapremo in stehtamo. Povečanje njegove teže je enako teži ujetega plina. — Predhodno izmerjeno prostornino V pri temperaturi T in tlaku p preračunamo na vrednost V_0 pri standardni temperaturi $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$ in tlaku $p_0 = 1\,\mathrm{atm}$ z uporabo plinske enačbe $pV/T = p_0V_0/T_0$. Z maso in prostornino je določena tudi gostota.



Slika 23.1 Tehtanje plina. Plin je ujet pod zvonom B v vodni kadi. Ko odpremo vmesno cev, steče plin v izčrpan merilni balon A. Razlika tež polnega in praznega balona je enaka teži ujetega plina. (Lavoisier, 1862)

Za vodik dobimo gostoto $0{,}09\,\mathrm{g/dm^3}$, za kisik $1{,}43\,\mathrm{g/dm^3}$ in za ogljikov oksid $2{,}00\,\mathrm{g/dm^3}$.

23.2 Reakcijska razmerja

Stalna masna razmerja

Gorenje vodika v kisiku, pri čemer nastaja voda, pokaže, da se plina spajata v stalnem *masnem razmerju*, in sicer 1:8. En gram vodika se spoji z 8 grami kisika v 9 gramov vode. Če je kakega od obeh plinov preveč, ostane neporabljen. Drugi podobni poskusi kažejo, da se snovi – plini, tekočine in trdnine – vedno spajajo v stalnih masnih razmerjih, na primer vodik in ogljik v metan 1:3, kisik in ogljik v ogljikov oksid 8:3, kisik in žveplo v žveplov oksid 1:1, ter železo in žveplo v železov sulfid 7:4. Razmerja so večinoma celoštevilčna. To je zakon o stalnih masnih razmerjih (Proust). Izjemno močno podpre zamisel o atomski zgradbi snovi.

Stalna prostorninska razmerja

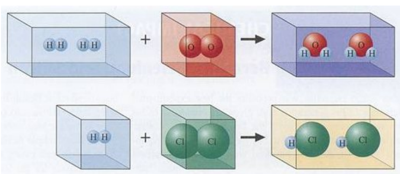
Pri plinih lahko poleg mas merimo tudi prostornine. Morda velja tudi zakon o stalnih *prostorninskih razmerjih*? — Pri temperaturi nad vreliščem vode zmešamo 1 l vodika in 1 l kisika ter ju prižgemo z žarečo žico. Nastane 1,5 l plina, ki vsebuje vodno paro. V porozno oglje vpijemo vodno paro, preostane 0,5 l kisika. Torej se 1 l vodika spoji z 0,5 l kisika v 1 l vodne pare. Vodik, kisik in vodna para so v prostorninskem razmerju 2:1:2.

Zmešamo še 1 l vodika in 1,5 l klora ter postavimo zmes na svetlobo; nastane 2,5 l plina. Odstranimo nastali vodikov klorid z raztapljanjem v vodi in prostornina se zmanjša na 0,5 l. To je čisti klor. Torej se je 1 l vodika spojilo z 1 l klora in naredilo 2 l vodikovega klorida. Plini so reagirali v razmerju 1:1:2.

Navedena poskusa in drugi podobni poskusi pokažejo, da se plini vedno spajajo v stalnih, celoštevilčnih prostorninskih razmerjih, in če je rezultat plin, je tudi ta v celoštevilskem razmerju z izvoroma (Gay-Lussac). Pri poskusih morajo biti vsi plini premerjeni pri enakih tlakih in temperaturah ali pa tja preračunani s plinsko enačbo.

23.3 Molekule v plinih

Stalna masna razmerja kažejo na to, da se atomi spajajo v molekule v točno določenih številčnih razmerjih. Stalna prostorninska razmerja pri plinih pa navajajo na misel, da obstaja povezava tudi med številom molekul in prostornino, v kateri so zaprte. Najpreprostejša je naslednja domneva: v različnih plinih, ki so vsi pri isti temperaturi in pritisku, vsebujejo enake prostornine, recimo 1 liter, enako število molekul (Avogadro). To tudi pomeni, da so razmerja gostot plinov enaka razmerju mas posamičnih molekul: $\rho_1 / \rho_2 = m_1/m_2$.



Slika 23.2 Različni plini, ki so vsi pri isti temperaturi in tlaku, vsebujejo v enoti prostornine enako število molekul. (Lake Tahoe College)

Zgradba vzorčnih molekul

Ker znaša razmerje med gostoto vodika in kisika $0{,}09/1{,}43 = 1{:}16{,}0$, je molekula kisika 16,0-krat težja od molekule vodika. Po drugi strani pa prostorninsko razmerje 2:1:2 pove, da nastaneta dve molekuli vode iz dveh molekul vodika in ene molekule kisika. Molekula kisika se mora torej razcepiti na dva dela; to pomeni, da vsebuje dva atoma (ali njih sodo število). Podoben razmislek velja za vodik in klor: tukaj se mora ena molekula vodika vgraditi v dve molekuli klorovodika. Molekula vodika je torej tudi sestavljena iz dveh (ali sodega števila) atomov. Predpostavimo, da je molekula vodika dvoatomna: H_2. Potem mora biti tudi molekula kisika dvoatomna, O_2, in molekula vode triatomna, H_2O. Molekuli klora in klorovodika morata biti dvoatomni, Cl_2 in HCl. Če maso vodikovega atoma proglasimo za *atomsko masno enoto u* in z njo merimo mase drugih atomov in molekul, so njihove *relativne mase μ* naslednje: vodikova molekula $2 \cdot 1 = 2$, kisikov atom 16,0, kisikova molekula $2 \cdot 16{,}0 = 32{,}0$, molekula vode $2 \cdot 1 + 16{,}0 = 18{,}0$, klorov atom 35,5 in klorovodikova molekula $1 + 35{,}5 = 36{,}5$.

Zgradba drugih molekul

Na podoben način določimo molekularno sestavo in relativne mase tudi za druge pline. Dobimo: dušik N_2, ogljikov oksid CO_2, ogljikov sub-oksid CO, žveplov oksid SO_2, žveplov super-oksid SO_3, metan CH_4 in amoniak NH_3. Iz očitnih razlogov preimenujemo dotične vrste oksidov v monoksid, dioksid in trioksid. Relativne mase atomov v plinih pa znašajo: C 12,0, N 14,0 in S 32,1. Vse mase so skorajda celoštevilčne, kar navaja na misel, da so atomi sestavljeni iz manjšega ali večjega števila enakih gradnikov, morda kar iz vodikovih atomov. Kjer relativna masa ni celoštevilčna, pa morda nastopa zmes dveh ali več vrst atomov, ki imajo celoštevilčne, a različne vrednosti; take hipotetične, različno težke atome istega elementa poimenujemo *izotope*.

23.4 Molekule v gosti snovi

Večina gostih snovi ima previsoko vrelišče, da bi jih lahko uplinili in jim izmerili gostoto. Vroč železni plin, na primer, bi težko kam zaprli. Tudi se marsikje zgodi, da pri uplinjanju molekule razpadejo. Zato je potrebnega precej raznovrstnega detektivskega dela, preden za preiskovano spojino ugotovimo, iz katerih atomov je sestavljena, kakšno je masno razmerje atomov v njej, in zlasti kakšna je relativna masa njenih molekul. Šele na podlagi vsega tega je namreč možno zapisati molekulsko formulo. Posebej težko pa postane, kadar v spojini naletimo na atome, ki jih še ne poznamo. Odkritje vsakega novega elementa je zgodba zase.

Kovine in rude

Rezultat raziskav je naslednji. Vse kovine, ki jih pridobivamo iz rud, so elementi: železo Fe 55,8, baker Cu 63,5, cink Zn 65,4, kositer Sn 118,7, živo srebro Hg 200,6 in svinec Pb 207,2.

Najdemo jih v naslednjih oksidnih in sulfidnih rudah: FeS_2 (pirit), Fe_2O_3 (hematit), Fe_3O_4 (magnetit); Cu_2S (halkozin) in Cu_2O (kuprit); ZnS (sfalerit), SnO_2 (kasiterit), HgS (cinabarit) in PbS (galenit).

Novi elementi

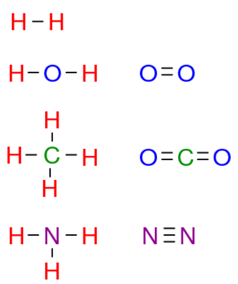
V sodi Na_2CO_3 se skriva kovina natrij Na 23,0; v pepeliki K_2CO_3 kovina kalij K 39,1; in v apnencu $CaCO_3$ nova kovina kalcij Ca 40,1. Vse tri snovi so spojine z atomsko skupino CO_3 in jim rečemo karbonati. Živo apno je CaO in gašeno apno $Ca(OH)_2$. Žveplena kislina je H_2SO_4 in solna kislina HCl. Morsko sol pa opisuje formula NaCl. Drugih snovi – elementov in spojin – je seveda še polno. Prvih je končno mnogo, ne več kot ~ 100, drugim pa ne vidimo konca.

23.5 Valenca atomov

Pogled na molekulske formule pokaže, da se atomi povezujejo, kot da bi imeli eno, dve ali več "rok". Vodik ima, po definiciji, eno roko. S kisikom se spajata dva vodika; ima torej dve roki. Podobno ima dušik tri roke in ogljik štiri. Štiriročni ogljik lahko veže štiri enoročne vodike ali dva dvoročna kisika.

Določanje valence

Valenco atoma *Z* definiramo kot število vodikovih atomov, s katerimi se ta atom spaja ali jih nadomesti v spojinah, oziroma kot število kisikovih atomov, s katerimi se vežeta ali jih nadomeščata dva dotična atoma. Zdi se, da valenca ni večja od štiri. Nekateri atomi, recimo železo, lahko kažejo več valenc. S čim več rokami sta povezana dva atoma, tem močnejša je njuna vez: dušikova molekula ima trikratno vez in je temu ustrezno inertna.



Slika 23.3 Atomi se med seboj spajajo preko "valenčnih vezi". Vsaka vrsta atomov ima svoje število teh vezi – med nič in štiri.

Seveda atomi nimajo zaresnih rok ali kljukic, s katerimi bi se sprijemali med seboj. Kako to delajo, ostaja zaenkrat še popolna skrivnost. Upamo, da jo bomo v nadaljevanju raziskav razkrili in razložili.

23.6 Velikost molekul

Iz oljnega madeža

Kako velike so molekule? Spomnimo se oljnih madežev na vodi. To nam da zamisel: na mirno vodno gladino, posuto s prahom, kanemo drobno kapljico olja in počakamo, da se razširi v mlako (prah smo dodali, da mlako lepše vidimo). Prostornina olja se pri tem ne spremeni. Če izmerimo premer kapljice in ploščino mlake, je s tem določena njena debelina. To je tudi debelina molekule olja. Ker vemo, da je sestavljena iz nekaj deset atomov (ogljika, kisika in vodika), ocenimo, da je premer njenih atomov 1/10 premera molekule. Kapljica s premerom 0,5 mm se razširi v mlako s premerom 2,5 dm; iz tega sledi premer atomov $d \sim 10^{-10}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Å}$. Vpeljali smo priročno enoto, *angstrem*.

Slika 23.4 Oljni madež na vodi, posuti s prahom. Velikost madeža sporoča, koliko so velike njegove molekule oziroma atomi. (IOP – Institute of Physics)

Atomi so torej silno majhni in še v komaj vidnih drobcih snovi jih je nepredstavljivo mnogo. Atom je proti jabolku kot jabolko proti Zemlji.

Iz izparevanja

V tekočini je molekula vode obdana s 6 sosedami, na površini pa s 5. Iz tega sklepamo, da je za popolno iztrganje molekule od sosed potrebno 6-krat toliko energije, kot za to, da jo spravimo iz notranjosti na gladino. Voda ima površinsko napetost γ, gostoto ρ in izparilno toploto q_i. V mislih povečajmo gladino za S. S tem opravimo delo $A = \gamma S$. Molekule, ki smo jih na ta način izrinili na površino, tvorijo plast z debelino $2r$. Prostornina plasti je $2rS$ in masa $m = 2rS\rho$. Za izparitev tolikšne množine vode je potrebna energija $mq_\mathrm{i} = 2rS\rho q_\mathrm{i}$. Ker $mq_\mathrm{i} = 6A$, se pravi $2rS\rho q_\mathrm{i} = 6\gamma S$, sledi $2r = 6\gamma/\rho q_\mathrm{i}$. Za vodno molekulo tako dobimo $2r = 2\,\mathrm{Å}$. Ker je sestavljena iz treh atomov, imajo ti premere reda velikosti $1\,\mathrm{Å}$.

23.7 Kilomol in kilomolska masa

Kilomol

Relativna masa μ molekule je ena izmed njenih najpomembnejših lastnosti. Nosi informacijo o tem, kako je molekula masivna. Prava masa molekule m_1 je namreč μ-kratnik atomske masne enote u. Kolikšna je ta enota v gramih ali kilogramih, zaenkrat ne vemo. Vemo pa, da dovoljšnje število N_A teh masnih enot tehta 1 kilogram:

$$N_\mathrm{A} \cdot u = 1\,\mathrm{kg}\,. \tag{23.1}$$

S tem je to število, *kilomol*, definirano. "Kilomol" je torej ime števila, tako kot "ducat". Množica N_A molekul z relativno maso μ ima maso

$$M = N_\mathrm{A}\mu u = \mu \cdot 1\,\mathrm{kg}\,. \tag{23.2}$$

Rečemo, da je to masa enega kilomola oziroma *kilomolska masa* dotične snovi. Vodik ima kilomolsko maso 2 kg, kisik 32 kg in voda 18 kg. Tisočkrat manjši enoti poimenujemo mol oziroma molska masa.

Ocena kilomola

Kolikšna pa sta kilomol oziroma atomska masna enota? Kilomol je določen, z definicijo, če poznamo atomsko masno enoto. Ta je določena, tudi z definicijo, če poznamo maso in relativno maso kakega atoma ali molekule, recimo vodne. Masa vodne molekule pa je določena, če poznamo gostoto vode in prostornino vodne molekule. Vse, kar potrebujemo, je torej velikost te molekule. To pa poznamo: $2r = 2\,\text{Å}$. Iz tega izračunamo $m_1 = (2r)^3\rho \sim 10^{-26}\,\text{kg}$, $u = m_1/\mu \sim 10^{-27}\,\text{kg}$ in $N_\text{A} = 1\,\text{kg}/u \sim 10^{27}$. V nadaljevanju raziskav bomo, tako vsaj upamo, uspeli določiti kilomol bolj natančno.

23.8 Splošna plinska konstanta

Ko primerjamo plinske konstante za različne pline, ugotovimo, da so obratno sorazmerne s kilomolskimi masami snovi:

$$R = \frac{R^*}{M} \qquad (23.3)$$

$$R^* = 8300\,\text{J/K}\,.$$

Sorazmernostno konstanto poimenujemo *splošna plinska konstanta*. Enačbo stanja zato zapišemo

$$pV = nR^*T \qquad (23.4)$$

$$n = \frac{m}{M}\,,$$

pri čemer je n število kilomolov oziroma kilomolskih mas plina.

Njena uporabnost

Vidimo, da je tlak plina odvisen le od številske gostote molekul n/V in od temperature; prav vseeno je, kakšne so te molekule. Enačba omogoča, da iz izmerjene specifične plinske konstante določimo relativno molekulsko maso preučevanega plina. Pove tudi, da en kilomol katerekoli plinaste snovi pri standardnih pogojih zavzema $22{,}4\,\text{m}^3$. Če plin pri teh pogojih ne obstaja, pa ga nanje preračunamo.

Kadar je plin mešanica dveh ali več plinov, kakor na primer zrak, sledi, da izvaja vsak delni plin svoj delni tlak in da je celotni tlak enak njihovi vsoti: $p = p_1 + p_2$, kakor smo že ugotovili (22.24). Za vsak plin velja plinska enačba z ustrezno konstanto. Njihova vsota je plinska enačba z "mešano" konstanto $n = n_1 + n_2$.

Kilomolska specifična toplota

Vzporedni pregled specifične toplote c in kilomolske mase M pri različnih kristalnih snoveh pokaže, da je njun produkt konstanten, in sicer (DULONG-PETITE)

$$c = \frac{3R^*}{M}\,. \qquad (23.5)$$

To velja pri temperaturah nad določeno mejo, ki je odvisna od vrste snovi. Pod to mejo se začne specifična toplota manjšati. Za ogljik in diamant, na primer, je sobna temperatura že prenizka, da bi ubogala zakon. Najdena soodvisnost omogoča, da lahko določimo kilomolsko maso neznane snovi iz njene specifične toplote ali obratno.

23.9 Raztopine

Raztopine

Ko vržemo ščepec soli v kozarec z vodo, sol izgine in voda postane slana. Rečemo, da se je sol raztopila. Sol je *topljenec*, voda je *topilo*. V vodi se raztapljajo tudi druge snovi: trdnine (sladkor), tekočine (alkohol) in plini (ogljikov dioksid). Slednjega v vodo potisnemo kar z batom in nato posodo zapremo. Nekatere snovi se pa ne raztapljajo, recimo petrolej. Seveda lahko poskušamo raztapljati snovi tudi v kaki drugi tekočini, recimo v alkoholu.

Koncentracija

Raztopino si predstavljamo kot tekočo zmes posamičnih molekul topljenca v topilu. Vseeno je, od kod so prišle molekule topljenca: iz trdnine, tekočine ali plina. Kvantitativno jo opišemo z razmerjem med maso ali številom molov topljenca in maso topila ali prostornino raztopine, to je z eno izmed različno definiranih *koncentracij*.

Koliko soli lahko raztopimo v kozarcu vode? Poskus pokaže, da največ 370 g/l (6 mol/l) pri sobnih pogojih. Prekomerna sol se ne raztaplja več, ampak se useda na dno. Rečemo, da je to *nasičena raztopina*. Meja nasičenosti je – pri soli – skoraj neodvisna od temperature. Drugače je pri sladkorju, kjer meja nasičenosti s temperaturo močno narašča. Če nenasičeno raztopino soli ali sladkorja pustimo, da izhlapeva in/ali se ohlaja, postane sčasoma nasičena in v njej se pojavijo kristali topljenca. To je *kristalizacija*.

Vplivi topljenca

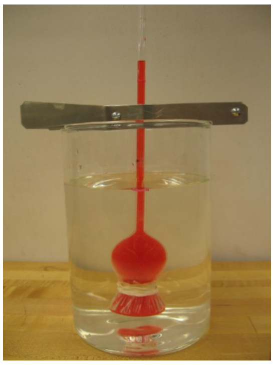
Lastnosti raztopine se razlikujejo od lastnosti čistega topila. — Gostota se spremeni. Slana voda je gostejša kot sladka. Ladja, ki iz slanega morja zapluje v reko, se bolj ugrezne. — Tališče se zniža. Čim večja je koncentracija topljenca, tem bolj izrazito je znižanje tališča. Nasičena raztopina morske soli zmrzne šele pri −21 °C. Mešanica ledu in soli je zato odlično hladilo. Pozimi posipamo ceste s soljo, da se led in sneg stalita. — Vrelišče se poviša – ali, kar je isto – nasičeni parni tlak se zniža. Sprememba je tem večja, čim večja je koncentracija topljenca. Nad čisto vodo pri sobnih pogojih znaša nasičeni parni tlak 23 milibarov, nad nasičeno raztopino soli pa le 17 milibarov; če je vlage preveč, se kondenzira. Odprta sol srka vlago iz zraka in postaja vlažna. Tako lahko zrak sušimo.

23.10 Osmozni tlak

Osmoza molekul

Raztopina kakšne snovi, recimo kuhinjske soli, je tudi neke vrste plin. Kadar je zaprta v kozjem ali kakem drugem mehurju, ki je propusten le za molekule vode, in potopljen v čisto vodo, se začne selitev vodnih molekul iz okolice v mehur: ta se napne, tlak v njem naraste. Poimenujemo ga *osmozni tlak*. Podobno se zgodi, ko položimo grozdno jagodo v čisto vodo. V jagodi je raztopina sladkorja; zunanja voda vdira vanjo in jagoda se napne.

Namesto z mehurjem je priročneje delati z navpično cevjo, ki je spodaj razširjena in zaprta s polprepustno opno iz mehurja ali pergamenta. Cev napolnimo s primerno raztopino in jo vtaknemo v posodo s čisto vodo tako globoko, da sta obe gladini poravnani. Raztopinski stolpec se začne višati, kar kaže na dotok sveže vode skozi opno. Višina stolpca meri osmozni tlak p. Predvidevamo, da je enak kot pri plinih: $p = (n/V)R^*T$, $n = m/M$. Tlak naj bi torej bil odvisen od številske koncentracije molekul in prav nič od njihove vrste.



Slika 23.5 Osmoza. V kozarcu je čista voda in v tubi je obarvana vodna raztopina alhkohola ali sladkorja. Ločilna opna (iz živalskega mehurja) prepušča v obe smeri le vodne molekule. Neto tok vode je usmerjen iz čiste vode v raztopino. Zaradi naraščajoče prostornine se raztopina dviguje, dokler njen hidrostatični tlak ne zaustavi dotoka. (University of Michigan)

Ko rečemo, da "ima" raztopina osmozni tlak, pomeni to naslednje: takšen tlak moramo izvajati nanjo, da preprečimo vdor čiste vode. Tlaki so presenetljivo veliki: raztopina 1 mola molekul na liter vode pri sobni temperaturi ima, po računu, osmozni tlak 22 bar! Meritve pokažejo, da ima približno tolikšen tlak tudi oceanska voda.

Disociacija molekul

Na prvi pogled se zdi, da nudi osmozna enačba odlično sredstvo za določevanje kilomolske mase topljenca iz ostalih izmerjenih količin. Ko pa jo preverimo na snoveh, ki jim že poznamo kilomolsko maso, se pokaže, da za nekatere snovi (glukozo) velja, za druge (kuhinjsko sol) pa ne. Enačbo zato popravimo s faktorjem i na desni strani; za glukozo znaša 1 in za kuhinjsko sol 1,8. Vpeljani faktor ima enak učinek, kakor da bi bilo namesto n kilomolov v raztopini prisotnih in kilomolov molekul. Stvar si razlagamo tako, da se večina molekul soli v raztopini razcepi na dva ali več delov. Rečemo, da *disociirajo*. To je podobno, kot pri molekulah vodne pare pri visoki temperaturi. Dokler ne poznamo disociacijskega faktorja za preiskovano snov, ji tudi ne moremo določiti kilomolske mase.

Osmoza in bitja

Voda v rastlinah vsebuje razne raztopljene snovi, recimo sladkor. Njihova koncentracija je v rastlini višja kot v okolišnji zemlji. Korenine so zavite v polprepustne opne. Zunanja voda zaradi osmoze vstopa skoznje in se po cevkah dviga do listov. Pri tem ji pomaga še "kohezija": vodne molekule se držijo druga druge in tiste, ki izhlapevajo iz listov, vlečejo preostale za sabo. Tako osmoza oskrbuje rastline z vodo in obenem prevaža snovi po "vodnem ožilju".

Ribe imajo v krvi raztopljeno sol. Njena koncentracija je višja od tiste v rekah in jezerih ter nižja od one v morju. Slednja znaša povprečno 35 g/l. V sladkovodne ribe zato stalno vstopa voda skozi škrge. Presežek vode izločajo ledvice kot obilno količino razredčenega urina. Morske ribe imajo nasprotno težavo. Skozi škrge stalno izgubljajo vodo. Nadomeščjo jo s pitjem skozi usta. Presežek soli izločajo ledvice kot majhno količino zgoščenega urina.

Brodolomci na morju, ki trpijo žejo, včasih pijejo morsko vodo. To je lahko smrtno nevarno. Človeška kri vsebuje namreč štirikrat manjšo koncentracijo soli kot morska voda. Telesna tkiva in kri zato z osmozo izgubljajo vodo v prebavila, polna popite morske vode. Ledvice poskušajo nastali višek soli iz krvi izločiti. Vendar pri tem človek z urinom izgubi več vode, kot jo s pitjem prejme. Pri veliki količini zaužite morske vode nastopi smrt. Menda so nekdaj Kitajci delali samomor tako, da so spili pol litra nasičene raztopine morske soli.

Da telesne celice v solni raztopini izgubljajo vodo, je pa lahko tudi koristno. Že od nekdaj so ljudje vedeli, da se nasoljeno meso ne pokvari tako hitro kot sveže. Zdaj tudi vemo, zakaj: vsaka bakterija in podobna "golazen", ki zaide vanj, je takoj "izsesana" in pogubljena. Ne more se razmnoževati in okužiti mesa s svojimi izločki in potomci.

23.11 Reakcijske enačbe

Zapis vzorčne reakcije

Molekulske formule kar vabijo, da z njimi opišemo snovne reakcije, ki jih že poznamo. Tako, na primer, prikažemo gorenje cinka na zraku kot $Zn + O_2 \rightarrow ZnO$. Zapis pove, katere molekule vstopajo v reakcijo in katere nastajajo. Zaradi ohranitve mase mora biti število istovrstnih atomov na vhodu in izhodu enako: zapis izboljšamo v "enačbo" $2\,Zn + O_2 = 2\,ZnO$. Ta dodatno pove, koliko molekul (ali kilomolov) se reakcije udeležuje. Ustreznih koeficientov si ni treba zapomniti, saj jih vedno lahko rekonstruiramo z "uravnovešanjem" enačbe. Če želimo, dodamo še informacijo o agregatnem stanju snovi in o energiji: $2\,Zn\,(s) + O_2\,(g) = 2\,ZnO\,(s) + (E)$.

Zapis drugih reakcij

Takšno je torej gorenje oglja: $C + O_2 \rightarrow CO_2$; žvepla: $S + O_2 \rightarrow SO_2$; vodika: $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$; in metana: $CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Redukcija oksidne rude poteka po vzorcu $Cu_2O + C \rightarrow Cu + CO_2$ in oksidacija sulfidne rude kot $Cu_2S + O_2 \rightarrow Cu_2O + SO_2$.

Vodenje zraka preko žarečega bakra veže kisik in prepusti dušik: $N_2 + O_2 + Cu \rightarrow Cu_2O + N_2\,(\uparrow)$. Vodenje vodne pare preko žarečega železa veže kisik in prepusti vodik: $Fe + H_2O \rightarrow Fe_3O_4 + H_2\,(\uparrow)$. Ko preko žarečega oglja vodimo ogljikov dioksid, nastaja ogljikov monoksid: $CO_2 + C \rightarrow CO\,(\uparrow)$, in vodenje žveplovega dioksida ter zraka preko žareče platine daje žveplov trioksid: $SO_2 + O_2 \rightarrow SO_3\,(\uparrow)$.

Z žganjem apnenca nastane higroskopično živo apno $CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2\,(\uparrow)$, ki z vodo da (gašeno) apno $CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$.

Žganje sode je podobno, $Na_2CO_3 \rightarrow Na_2O + CO_2\,(\uparrow)$, in spoj nastalega higroskopičnega oksida z vodo da (sodin) lug $Na_2O + H_2O \rightarrow NaOH$.

Kakor kažeta natrijev in kalcijev oksid, daje kovinski oksid z vodo lug. Nekovinski oksid v vodi pa da kislino: $SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$.

Marsikatera kovina iz kisline izrine vodik: $Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2\,(\uparrow)$; $NaCl + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + HCl\,(\uparrow)$; in $CaCO_3 + HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2\,(\uparrow)$. Tako pridobivamo plinasti vodik, klorovodik in ogljikov dioksid.

Kislina in lug se nevtralizirata v sol in vodo: $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$. Lugi, kisline in soli v vodi disociirajo. Kaže, da pri tem lugi tvorijo skupke OH in kisline atome H, kar daje vodi lužnat ali kisel okus. Pri nevtralizaciji se obe skupini združita v vodo in izvorna okusa izgineta, nastala sol pa prinese nov okus.

23.12 Ravnotežje reakcij

Smer reakcije

Ko vodimo vodno paro skozi cev preko žarečega železa, se to spreminja v oksid (rjo), izhaja pa vodik: $Fe + H_2O \rightarrow Fe_3O_4 + H_2$. Ko pa preko žarečega železovega oksida vodimo vodik, se reducira v železo, izhaja pa vodna para: $Fe_3O_4 + H_2 \rightarrow Fe + H_2O$. Kako je mogoče, da gre ista reakcija enkrat v eno smer in drugič v drugo? Zato, ker v prvem primeru sproti odstranjujemo produkt na desni, vodik, in v drugem primeru produkt na levi, vodno paro. Kaže, da reakcija poteka v tisti smeri, kamor jo potiska "presežek" reagentov. Če tega ne bi bilo, bi se reakcija ustavila. To velja za vsakršno reakcijo.

Ravnotežna konstanta

Splošna oblika reakcije je $a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \leftrightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$. Reagenti na levi strani proizvajajo reagente na desni z določeno hitrostjo, in nasprotno. V plinih in raztopinah je hitrost proizvajanja v desno sorazmerna s številom trkov med molekulami reagentov ne levi, to je sorazmerna s produktom števila kilomolov na prostorninsko enoto, $[\mathrm{A}]^a \cdot [\mathrm{B}]^b$. Oklepaj pomeni kilomolsko koncentracijo snovi, to je število kilomolov snovi na m^3 raztopine, normirano na standardno koncentracijo $1\,\mathrm{kmol/m}^3$. Je torej brez dimenzije. Enako velja za reagente na desni. Reakcija teče v tisto smer, kamor velevajo koncentracije. Če ničesar ne odstranjujemo, se prej ali slej vzpostavi ravnotežje proizvodnje v desno in levo.

Takrat velja $K = [C]^c \cdot [D]^d / [A]^a \cdot [B]^b$, s čimer je definirana *ravnotežna konstanta K*. Vsaka reakcija ima svojo konstanto. Upoštevamo le komponente, ki so plini ali raztopine; za čiste tekočine in trdnine velja vrednost 1.

Premik konstante

Do kam reakcija teče, to je, koliko snovi se bo porabilo/nastalo na eni ali drugi strani, je odvisno od ravnovesne konstante. Če odstranjujemo produkte na levi ali desni, uravnavamo smer in hitrost reakcije. Ravnovesna "konstanta" pa je odvisna tudi od temperature in pritiska. Poskus pokaže, da zvišanje temperature premakne konstanto proti tisti strani, kjer se toplota porablja, zvišanje pritiska pa tja, kjer je manj vrst molekul. Sintezo snovi je torej dobro delati pri visokem tlaku. □

24 Elektrika

Električni naboji – Zaznavanje nabojev – Ločevanje nabojev – Magnetni dipoli – Zemlja kot magnet – Električni tok – Elektroliza snovi – Magnetni učinek toka – Električna napetost – Električni upor – Meritve vezij

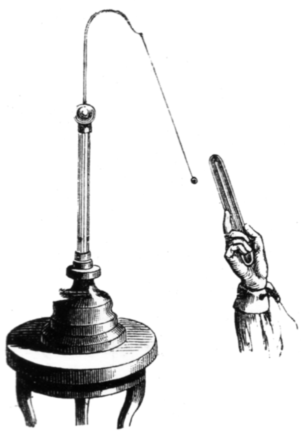
24.1 Električni naboji

Naelektritev snovi

Že stari izdelovalci nakita so opazili, da jantar (okamenela smola iglavcev), ko ga čistijo z volneno krpo, privlači lase, ptičja peresca in koščke slame (Tales). Podobno se zgodi pri drgnjenju steklene palice s svilenim robcem. Rečemo, da smo jantar ali steklo *naelektrili* oziroma da sta postala *električna*. Tudi mnogo drugih snovi lahko naelektrimo. Kar vsiljuje se misel, da pri drgnjenju na palico "nekaj pride" ali tam "nastane". Tisto nekaj lahko tudi "obrišemo" ali "izničimo" z vlažno roko; palica se pri tem *razelektri*. Ne naelektrita oziroma razelektrita pa se le palici, ampak tudi krpi, s katerima ju drgnemo.

Dve vrsti naelektritve

Za lažje preučevanje opaženega pojava naredimo več kroglic iz plute ali bezgovega stržena. Prevlečemo jih s kositrno folijo (staniolom) in obesimo na svilene niti. — Ko naelektreno stekleno palico približamo kroglici, jo palica najprej pritegne k sebi, po dotiku pa odbije. Povsem enako se vede kroglica, če uporabimo naelektreno jantarno palico. — Dve kroglici, dotaknjeni z naelektrenim steklom, se med seboj odbijata. Odbijata se tudi, če sta bili dotaknjeni z naelektrenim jantarjem. — Kadar pa je ena dotaknjena s steklom in druga z jantarjem, se privlačita.



Slika 24.1 Naelektrena steklena palica privlači kroglico iz bezgovega stržena. (Lutken, 1878)

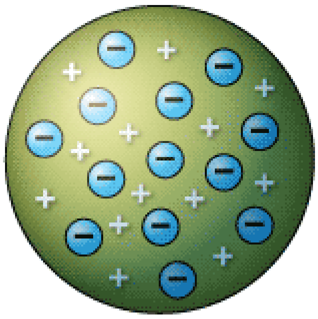
Kaže torej, da se naelektritev prenaša s palice na kroglico ob njunem stiku. Prenašata se tako "steklena" kot "jantarna" naelektritev. Istoimenski naelektritvi, recimo stekleni, se odbijata, raznoimenski pa privlačita. Odmiki kroglic kažejo, da sta tako privlak kot odboj odvisna od medsebojne razdalje kroglic, in sicer z razdaljo pojemata. Vse ostale naelektritve se vedejo bodisi kot steklena ali kot jantarna.

Izničenje naelektritve

Če staknemo raznoimensko naelektreni kroglici, se njuni naelektritvi bolj ali manj izničita, kar pokaže zmanjšan odklon kroglic iz ravnovesne lege. To se zgodi ob neposrednem stiku, pa tudi preko vmesne "prevodne" povezave, na primer bakrene žice, obešene na svileni niti. Prevajajo kovine, ne pa svilena nit in suh zrak. Prvim rečemo *prevodniki*, drugim *izolatorji*. Meja med obema ni ostra. Poseben primer je, ko kroglico povežemo z Zemljo, najpreprosteje kar tako, da jo primemo ali se je dotaknemo z žico; seveda ne smemo imeti izolirnih podplatov. Takrat naelektritev kroglice – steklena ali jantarna – povsem izgine.

Nosilci in naboji

Kako si razlagamo opisane pojave? Zamišljamo si, da so atomi – kakor potica z rozinami – posejani z drobnimi in zelo lahkimi delci, *elektroni*. Koliko jih je, je seveda preuranjeno domnevati. Večina elektronov je v notranjosti in nekaj na površini. Elektroni in glavnina atoma – *jedro* – so električno *nabiti* oziroma nosijo električni *naboj*. Naboj jedra samovoljno proglasimo za pozitivnega in naboj elektrona za negativnega. Naboj je – tako kot masa – lastnost nosilca in je nespremenljiv. Naboj jedra je nasprotno enak skupnemu naboju vseh vsebujočih elektronov. Navzven je atom zato *nevtralen*. Istoimenski naboji se odbijajo, nasprotnoimenski privlačijo. Te sile poimenujemo *električne sile* in jih bo treba še podrobno raziskati; za zdaj vemo le, da z razdaljo pojemajo. V prevodnikih so površinski, "prosti" elektroni zlahka gibljivi od atoma do atoma, v izolatorjih pa ne.



Slika 24.2 Model atoma kot potice z rozinami. Atom sestoji iz pozitivno nabitega jedra, ki vsebuje negativno nabite elektrone. Skupaj jih drži privlačna sila med raznoimenskimi naboji. (Nobel Media)

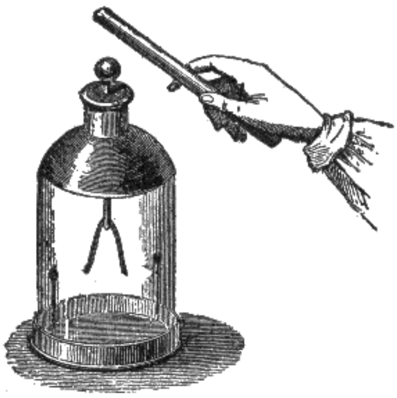
Ob stiku (drgnjenju) dveh primernih snovi preide majhen delež elektronov z ene na drugo stran. Višek ali primanjkljaj elektronov se kaže kot naelektrenost ene ali druge vrste: jantarna ali steklena. Rečemo, da ima telo neto naboj.

Ali je neto naboj na nalektrenem steklu oziroma jantarju posledica viška ali primanjkljaja elektronov, zaenkrat ne vemo; elektroni so tako lahki, da jim s tehtnico ne pridemo do živega. Vendar to do nadaljnjega ni pretirano pomembno. Neto naboj na prevodniku – pozitiven ali negativen, primanjkljaj ali višek elektronov – je namreč vedno porazdeljen po njegovi površini, ker se istoimenski naboji med seboj pač odbijajo. Med stikanjem prevodnikov stečejo elektroni od gosto naseljenih proti redkeje naseljenim področjem. To lahko formalno obravnavamo tudi kot gibanje pozitivnih nabojev v nasprotni smeri, ne meneč se za dejansko gibanje snovnih nosilcev.

24.2 Zaznavanje nabojev

Elektroskop

Viseče staniolne kroglice s svojim odklonom iz ravnovesne lege kažejo prisotnost nabojev. Bolj občutljiva sta dva tanka zlata lističa, viseča drug ob drugem s konca navpične kovinske palice, *elektrode*, in pokrita s steklenim zvonom, da ju ne moti gibanje zraka. Zvon je postavljen na prevodno podlago, je *ozemljen*. To je *elektroskop*.



Slika 24.3 Elektroskop z zlatima lističema. Če sta lističa naelektrena, to je, če vsebujeta višek ali primanjkljaj elektronov, se odbijata. (Hawkins, 1914)

Ko se z nabito palico – stekleno ali jantarno – dotaknemo elektrode, se prinešeni naboj – najsibo posledica viška ali primanjkljaja elektronov – razširi na oba lističa, ki se zato odklonita drug od drugega. Velikost odklona kaže, koliko je naboja. Z roko se dotaknemo elektrode, njen naboj steče v Zemljo in lističa se povrneta v visečo lego.

Influenca nabojev

Elektroskopska lističa se razmakneta tudi takrat, ko nabito palico samo približamo elektrodi, ne da bi se je sploh dotaknili. Ko palico odmaknemo, tudi lističa uplahneta. Razlaga je naslednja. Postavimo, da je palica nabita pozitivno. Njen pozitivni naboj pritegne negativne naboje v elektrodi na vrh in "potisne" pozitivne naboje na dno. Rečemo, da so se v nevtralni elektrodi *influencirali* naboji. Lističa se zato naelektrita pozitivno in se odklonita. Ko palico odmaknemo, se ločeni naboji zaradi privlačevanje spet združijo in nevtralizirajo.

Če se medtem, ko so naboji na elektrodi influencirani, dotaknemo vrha elektrode z roko, steče tamkajšnji negativni naboj v Zemljo in na elektrodi preostane višek pozitivnega naboja. Ko nato odmaknemo palico, ostane elektroda nabita in lističa odmaknjena.

Zdaj tudi razumemo, zakaj nabita palica priteguje koščke papirja in nevtralne staniolne kroglice. Kriva je influenca nabojev. Postavimo, da je palica nabita pozitivno. Na bližnji strani kroglice ali koščka papirja se potem influencirajo negativni naboji in na nasprotni strani pozitivni. Sila na bližnje naboje je večja kot na oddaljene, zato prevlada privlak.

24.3 Ločevanje nabojev

Torni generator

Ugodno bi bilo imeti stroj, ki bi na primernem telesu ustvarjal naboj, pozitivni ali negativni. Najpreprostejša je okrogla steklena plošča, ki jo vrtimo in ki se je dotikata dva drsnika: prvi je usnjena blazina, povezana z Zemljo, in drugi kovinska ščetka, povezana s kovinsko kroglo na izolirnem podstavku. Drgnjenje med krpo in steklom "ustvarja" na obeh naboje: tisti na steklu se prenaša preko ščetke na kovinsko kroglo, oni na krpi pa v Zemljo. Kovinska krogla se, postavimo, nabije pozitivno. Nasprotni, negativni naboj se razširi in porazgubi po širni Zemlji.

Naboj na kovinski krogli ne more nikamor, ker je krogla izolirana od Zemlje. Če se je dotaknemo s prstom, pa ustvarimo povezavo z Zemljo in preko nas steče pozitivni neto naboj v tla. Pri tem nas strese. Močno nabite krogle se ni treba niti dotakniti: ko ji približamo prst, preskoči iskra: to je sled nabojev, ki tečejo skozi zrak.

Slika 24.4 Drgnjenje roke ob vrtečo se stekleno ploščo ustvarja pozitivne naboje na plošči in negativne v roki. Prvi se prenašajo in kopičijo na kovinskem valju, drugi sproti odtekajo v Zemljo. Ko se izolirana gospodična dotakne valja, se tudi sama naelektri pozitivno. Poljub gospoda ustvari prevodno povezavo z Zemljo, po kateri steče naboj ob "prijetnem" ščemenju. (Bose, 1744)

Kondenzator

Na kroglo ali valj v tornem generatorju ne gre prav dosti, recimo, pozitivnega naboja, ker ta "tišči nazaj" in zavira dotok svežih nabojev. Kaj, ko bi valj obdali z drugim, ozemljenim valjem: potem bi pozitivni naboj na notranjem valju pritegnil negativni naboj iz Zemlje na zunanji valj, ta negativni naboj pa bi "razredčil" zaviralni vpliv pozitivnega naboja, Takšen dvojni valj zlahka izdelamo: litrski steklen kozarec znotraj in zunaj ovijemo s staniolno folijo; zunanjo folijo ozemljimo, notranjo pa preko kovinske palice skozi izolirni zamašek povežemo s ščetko generatorja. To je *kondenzator*, posoda za shranjevanje naboja. Drži več dni. Čim večja je ploščina folije in čim tanjši je kozarec, tem več naboja gre vanj, kar pokaže elektroskop.

Slika 24.5 Električni kondenzator – naprava za shranjevanje naboja. (Niigata University)

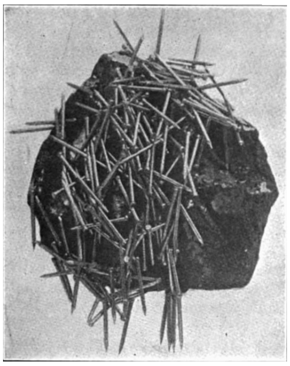
Kovinska palica, ki štrli iz kondenzatorja, mora imeti na vrhu kroglo, da naboj nikjer ni preveč nagneten in da zato ne odteka v okolico. Če tej krogli približamo žebelj ali prst, držeč z drugo roko zunanjo folijo kozarca, bomo doživeli izkušnjo, ki je ne bomo zlahka pozabili!

24.4 Magnetni dipoli

Magnetizem

Kovačem je od nekdaj znano, da kosi nekatere železove rude privlačijo železne žeblje (TALES). Rekli bomo, da so ti kosi *magnetni*. Na vsakem takem kosu, *magnetu*, sta dve odlikovani točki, kjer je privlak posebno močan. To sta *magnetna pola*. Ležita na medsebojno nasprotnih straneh. Najlaže ju najdemo tako, da magnet povaljamo v železnih opilkih. Dober magnet drži toliko, kot je sam težak.

Morda se da pola ločiti? Magnet s kladivom in dletom razbijemo na kose, vendar ima, presenetljivo, vsak kos spet po dva pola. Nikoli ne najdemo kosa, ki bi imel samo en pol.



Slika 24.6 Magnetni kamen privlači in drži ob sebi železne žeblje. (Annet, 1921)

Namagnetenje

Žeblji, ki visijo na magnetu, so tudi sami magnetni: privlačijo druge žeblje. Ko pa jih odtrgamo proč, izgubijo svojo magnetnost. Drugače je z jekleno iglo ali palico: ko jo nekajkrat pogladimo s polom magneta, se namagneti in magnetnost tudi obdrži. Postane trajen *paličasti magnet* s polom na vsakem koncu. Ni videti, da bi izvirni magnet po glajenju kaj oslabel.

Trajni magneti so kolikor toliko trajni le, če z njimi ravnamo obzirno. Po močnem udarjanju s kladivom ali po segrevanju do rdečega žara povsem izgubijo svoj magnetizem.

Magnetni dipoli

Za preučevanje magnetizma izdelamo nekaj jeklenih paličastih magnetov in jih po potrebi obesimo na niti ali položimo na deščice na vodi. Takoj ugotovimo, da obstajajo magnetni poli dveh vrst: eni se med seboj privlačijo in drugi odbijajo. Če izberemo poljuben magnetni pol kot referenco, potem ta nekatere pole privlači – označimo jih z "A", in druge pole odbija – recimo jim "B". Pokaže se, da se enako poimenovani poli med seboj odbijajo in različno poimenovani privlačijo. Sile, recimo jim *magnetne sile*, pojemajo z oddaljenostjo. Pola na istem magnetu sta zmeraj različna.

Kako si razlagamo opisane pojave? Zamišljamo si, da so atomi železa (in morda še nekaterih snovi) majhni magneti, vsak z dvema poloma. Če osi teh *elementarnih magnetov* kažejo v vse smeri, snov navzven ni magnetna. Če so pa – vsaj deloma – usmerjene v isto smer, je snov magnetna. Ko urejenim elementarnim magnetom (v magnetu) približamo neurejene (v žeblju), se slednji usmerijo in pritegnejo proti prvim. Namagnetenje je začasno ali trajno. Vsakršno tresenje usmerjenih elementarnih magnetov – s kladivom ali vročino – jih usmeri v vse smeri in magnetizem izgine.

24.5 Zemlja kot magnet

Zemeljski magnetizem

Vsak paličasti magnet, ki je vrtljiv okoli navpične osi in ki ga ne moti bližina drugih magnetov in železja, se – presenetljivo – zavrti v smer sever-jug. Iz tega sklepamo, da je tudi Zemlja orjaški magnet s poloma blizu geografskih polov (GILBERT). Seveda jo izkoristimo za poenoteno določanje polov na drugih magnetih. Tisti pol magneta, ki kaže proti severu, poimenujemo *severni*, N, in drugega *južni*, S. To sta boljši oznaki kot dosedanji oznaki A in B. Vemo že, da se dva pola privlačita, če sta raznoimenska, in odbijata, če sta istoimenska. Zemlja ima zato na severu južni magnetni pol in na jugu severnega. Iz očitnih razlogov pa prvega raje poimenujemo severni *geomagnetni pol* in drugega južni geomagnetni pol.

Magnetni kompas

Obračanje magnetne igle proti severu oziroma jugu ima veliko praktično vrednost. Vrtljiva magnetna igla, zaprta v bakreni ali leseni škatlici, tvori srce magnetnega *kompasa*. Pomorščakom v dobi raziskovanj je bil življenjskega pomena. Zmeraj, tudi v megli in oblačnem vremenu, je verno kazal, kje je sever. Seveda so morali paziti, da v bližini ni bilo motečega železja. Zato so tudi hudo kaznovali vsakogar, ki je stikal naokrog: na jambor so mu pribili roko.

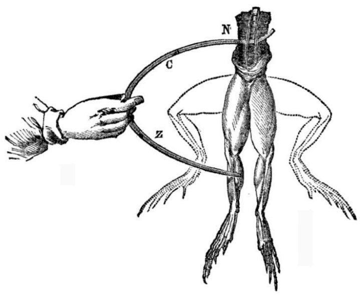
Slika 24.7 Kompas – magnetna igla, vrtljiva okrog navpične osi. Če je nič ne moti, kaže proti Zemljinem severnem in južnem geomagnetnem polu. Prikazana je replika žepnega kompasa iz dobe parnikov. (Dollond, London)

Kompasova igla ne kaže natanko proti geografskemu severu, temveč je od njega bolj ali manj odmaknjena. Temu odmiku rečemo *magnetna deklinacija*. Odvisna je od kraja meritve in znaša v Ljubljani 2° vzhodno. Deklinacija se spreminja tudi s časom, v Ljubljani okrog 10° na 100 let. Očitno se zemeljska magnetna pola premikata.

24.6 Električni tok

Žabji krak

Razelektritev kondenzatorja skozi naše telo povzroči šok: mišice se skrčijo. Morda se skrčijo tudi mrtve, ne samo žive mišice? Poskusimo z žabjim krakom: da, skrči se. Pri izvajanju tovrstnih poskusov pa opazimo naslednje: ko se pri seciranju dotikamo kraka z železnim skalpelom in z bakrenim kavljem ter ju slučajno staknemo, krak nepričakovano trzne! Kako to razumeti? Morda se ob mokrem stiku z mišico (vodno raztopino raznih snovi) kovina naelektri, nekako tako, kot pri suhem stiku stekla in svile. Železo se naelektri drugače kot baker, in ko se stakneta, stečejo naboji naokrog, tudi skozi krak, in ga stresejo. Krak je torej hkrati soproizvajalec in pokazatelj električnega toka (GALVANI).



Slika 24.8 Žabji krak, ki se ga dotikata železna in bakrena pinceta, trzne, ko pinceti staknemo. (Galvani, 1791)

Električni člen

Zdaj vemo, kako naprej. Eden izmed poskusov je naslednji. V vodno raztopino žveplene kisline H_2SO_4 vtaknemo cinkovo in bakreno palico ter ju zunaj povežemo z bakreno žico. Žica se segreva, ob bakru se izločajo mehurčki plina, ki ga določimo kot vodik H_2, cinkova palica pa se počasi razkraja in pod njo se začne na dnu nabirati bel prah, ki ga določimo kot cinkov sulfid $ZnSO_4$. Segrevanje žice pojasnimo tako, da skoznjo tečejo prosti elektroni, ki trkajo ob atome in jim večajo živahnost nihanja.

Rečemo, da smo sestavili *električni člen*, ki po žici poganja *električni tok* (VOLTA).

Pozitivni in negativni ioni

Kaj poganja elektrone in v katero smer se gibljejo? — Iz osmoznega tlaka [23.10] vemo, da se molekule žveplene kisline v vodi razcepijo v več delov; postavimo, da je to trojica H, H in SO_4. — Predpostavimo, da ti deli niso električno nevtralni, ampak nabiti, in jih poimenujmo *ione*: dva vodikova in en sulfidni. Ioni so torej atomi ali molekule, ki imajo višek ali primanjkljaj elektronov. — Sulfidni ioni iz cinkove palice ruvajo (nasprotno naelektrene) cinkove ione in se z njimi združujejo v nevtralen cinkov sulfid, ki pada na dno. Ker so v cinku zunanji elektroni atomov zlahka gibljivi, se zdi verjetno, da so izruvani cinkovi ioni pozitivni. Sulfidni ioni so potemtakem negativni in vodikovi pozitivni. — Višek elektronov, ki ostaja v cinkovi palici po ruvanju, se razbeži po žici do bakrene palice. Tam privlači pozitivne vodikove ione in se z njimi združi v nevtralne molekule vodika, ki uidejo. — Postopek poteka kar naprej: po žici tečejo elektroni od cinka do bakra, po raztopini pa vodikovi in sulfidni ioni vsak v svojo smer. Pretakanje se ustavi najkasneje takrat, ko se porabita ves cink ali žveplena kislina. V praksi pa člen obnemore že dosti prej: vodik se namreč ob bakreni palici ne izloča povsem, ampak se nabira na njej in preprečuje dostop vodikovim ionom. Podobno se dogaja s cinkovim sulfidom na cinkovi palici.

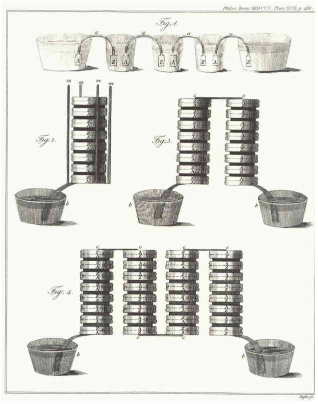
Pozitivna in negativna elektroda

Če odstranimo žico, se na cinkovi palici nabere toliko elektronov, da nastali negativni naboj odbija napade sulfidnih ionov. Razkroj cinka se ustavi. Iz bakrene palice pa vodikovi ioni posrkajo toliko elektronov, da nastali pozitivni naboj preprečuje dotok vodikovih ionov. Tudi izločanje vodika se ustavi. Cinkovo elektrodo z viškom elektronov zato poimenujemo *negativna elektroda*, bakreno elektrodo z manjkom elektronov pa *pozitivna elektroda*. Elektroni tečejo po žici od negativne na pozitivno elektrodo.

Elektrone poganjajo po žici tudi drugačne kombinacije palic in raztopin. Vsak tak električni člen ima dve elektrodi, namočeni v *elektrolit*. Vsi delujejo podobno: na eni elektrodi nastaja višek elektronov, se po žici širi na drugo elektrodo in tam zgineva v elektrolit. Nekateri spretno sestavljeni členi shajajo s "suhim" elektrolitom in ne oddajajo v okolje nič snovi.

Električne baterije

Če zaporedno povežemo več električnih členov, dobimo *električno baterijo* in segrevanje žice je močnejše. Očitno teče po njej večji tok. Nesklenjena baterija pa ima – v primerjavi s posameznim členom – tudi večji presežek oziroma večji primanjkljaj elektronov na elektrodah.



Slika 24.9 Baterija – vir električnega toka. (Volta, 1800)

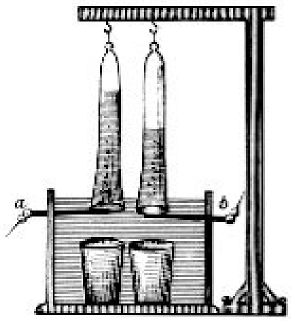
Pri bateriji, sestavljeni iz več sto (!) členov, sta naboja na nesklenjenih elektrodah dovolj velika, da lahko z njima naelektrimo druga telesa, recimo elektroskop. Tako ugotovimo, da ima steklena palica istoimenski naboj kot pozitivna elektroda baterije. Naboj na stekleni palici je torej pozitiven, to je, nabita palica ima primanjkljaj elektronov. Nabita jantarjeva palica pa ima presežek elektronov.

24.7 Elektroliza snovi

V vodnih raztopinah kislin, baz in soli – elektrolitih – so prosto gibljivi ioni. Če v tak elektrolit vtaknemo dve kovinski ali ogleni elektrodi, povezani s poloma baterije, pričakujemo zanimive rezultate.

Razcep vode

Ko teče električni tok skozi vodo, ki smo ji dodali malo žveplene kisline, se na negativni elektrodi – tisti, ki je povezana z negativnim polom baterije – izločajo mehurčki vodika in na pozitivni mehurčki kisika. Kisikova elektroda mora biti iz platine, ker se sicer oksidira. Na negativni elektrodi torej (kislinski) vodikovi ioni prisvajajo presežne elektrone in uhajajo kot nevtralne molekule vodika. Sulfidni ioni pa iz molekul vode trgajo vodikove ione, ki nadomeščajo tiste, ki jih je zmanjkalo, nastali kisikovi ioni pa na pozitivni elektrodi oddajo elektrone in uidejo kot nevtralne molekule kisika. Količina kisline se ne spremeni, porablja se le voda. Tako na udoben način pridobivamo oba plina, in sicer s cepitvijo vode!



Slika 24.10 Električni tok skozi vodno raztopino žveplene kisline razcepi vodo na vodik in kisik. (Ritter, 1800)

Etalon naboja

Ko teče električni tok skozi raztopino srebrovega nitrata, $AgNO_3$, se na negativni elektrodi nalaga srebro. Izločanje srebra izkoristimo za kvantitativno definicijo naboja e. Predpostavimo, da vsi srebrovi ioni nosijo enak naboj; potem je masa izločenega srebra sorazmerna s pretočenim nabojem. Če se izloči 1,12 mg srebra, proglasimo, da se je pretočil naboj 1 *coulomb* (C). Zakaj ne natanko 1 mg, bo razvidno v nadaljevanju. Če imata elektrodi ploščino nekaj kvadratnih centimetrov in sta oddaljeni kakšen decimeter; če znaša koncentracija elektrolita mol na liter; in če je priključena desetčlenska baterija, potem se izloči gram srebra v približno petnajstih minutah. V tem času se torej pretoči okrog 10^3 C naboja.

Jakost toka

Preko pretočenega naboja je kvantificirana tudi *jakost toka*

$$I = \frac{e}{t}\,. \tag{24.1}$$

Enoto C/s na kratko poimenujemo *amper* (A). To seveda pomeni tudi obratno: 1 C = 1 As, *ampersekunda*. Ker se naboj ohranja in se nikjer v krogotoku ne kopiči, mora biti jakost toka skozi vsak presek kroga enaka. Pri elektrolizi srebrovega nitrata, ko se izloča gram srebra v petnajstih minutah, teče torej tok z jakostjo približno 1 A.

Gostota toka

Ni vseeno, skozi kakšen presek teče tok vzdolž tokokroga. Manjši ko je presek, bolj se v njem gnetejo nosilci nabojev in bolj segrevajo okolico. Zato je smiselno definirati *gostoto (električnega) toka* kot

$$j = \frac{I}{S}\,. \tag{24.2}$$

Poskusi pokažejo, da žica s presekom 1 mm^2 zdrži tok do 10 A, ne da bi se pretirano segrela. Pri večjih gostotah toka se žica močno segreje in celo stali.

Elektrolizni zakon

Elektroliza različnih snovi (srebrovega nitrata, bakrovega sufata in drugih) pokaže, da so z enoto pretočenega naboja e izločene mase m sorazmerne s kilomolskimi masami M, deljenimi z valenco Z atomov (z ekvivalentnimi masami snovi):

$$\frac{m}{e} = \frac{1}{F}\frac{M}{Z} \qquad F = 96 \cdot 10^6\,\mathrm{C}\,. \tag{24.3}$$

To je *elektrolizni zakon* (FARADAY). Nedvoumno sporoča, da nosi vsak ioniziran atom (ion) toliko dodatnih elektronov, kakršna je njegova valenca, oziroma da mu jih prav toliko manjka. Pravzaprav velja obratno: valenca atoma je odraz tega, koliko dodatnih elektronov sprejema ali oddaja pri interakciji z atomi v okolici. To nadalje pomeni, da pri združevanju atomov v molekule igrajo osrednjo vlogo njihovi *valenčni elektroni*. Ione je zato smiselno označevati takole: H^+, O^{2-}, SO_4^- in podobno.

Osnovni naboj

Če se izloči N_A atomov, znašata $m = M$ in $e = N_A Z e_0$. Vstavitev njunega razmerja v elektrolizni zakon pove:

$$F = N_A e_0 \,. \tag{24.4}$$

S tem se odpre možnost za izračun osnovnega naboja iz kilomolskega števila in obratno. Že znana ocena za kilomolsko število $N_A \sim 10^{27}$ pove $e_0 \sim 10^{-19}$ C. En coulomb je torej toliko naboja, kot ga nosi $\sim 10^{19}$ elektronov.

24.8 Magnetni učinek toka

Naelektrenje in sila med električnimi naboji ter namagnetenje in sila med magnetnimi dipoli puščata občutek, da so električni in magnetni pojavi sorodni in morda povezani med seboj. Pri iskanju povezave priskoči na pomoč sreča: ko spustimo električni tok po žici, da bi preučevali njeno segrevanje, se naključno zraven ležeča magnetnica odkloni iz svoje lege (OERSTED)! To nam da izhodišče za nadaljnje raziskave.

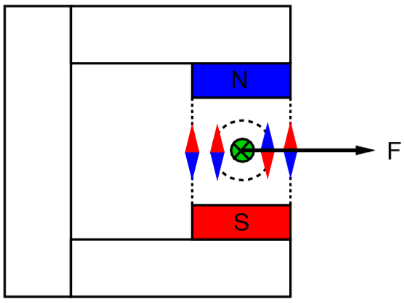
Tok vpliva na magnet

Nad vodoravno magnetnico, ki seveda kaže proti severu, namestimo vodoravno žico v poljubni smeri. Ko skoznjo spustimo električni tok, se igla odkloni iz svoje smeri in se postavi pravokotno na žico. Če smer toka obrnemo, se igla odkloni enako, le severni in južni pol sta zamenjana. V mislih zgrabimo žico z levo roko tako, da kaže iztegnjeni palec v smer gibanja elektronov. Potem zviti prsti kažejo, kako so usmerjeni severni poli okolišnjih magnetnic. To je "pravilo leve roke".

Slika 24.11 Magnetna igla v bližini električnega toka se obrne v smer pravokotno na tok. Prikazan je spomenik odkritelju. (Deutches Museum, Muenchen)

Magnet vpliva na tok

Če deluje tok na magnet, mora tudi magnet delovati na tok. Vodoravna žica, obešena kot gugalnica med navpično razmaknjenima poloma podkvastega magneta, se odkloni paralelno vodoravno, ko skoznjo steče tok. Če zamenjamo smer toka, se gugalnica odkloni v nasprotno smer. Spet v mislih zgrabimo žico z levo roko in zviti prsti pokažejo, kako se postavijo okolišnje magnetnice pod vplivom toka. Pogledamo, na kateri strani žice so magnetnice usmerjene enako, kot bi jih usmeril podkvasti magnet. Sila deluje na žico v nasprotni smeri.



Slika 24.12 Sila magneta na vodnik. Elektroni tečejo v ravnino risbe. Notranji magnetnici sta narisani tako, kot da bi nanju deloval zgolj vodnik, zunanji pa tako, kot da bi deloval zgolj magnet. Magnetove magnetnice delujejo na tokovne magnetnice s silo F.

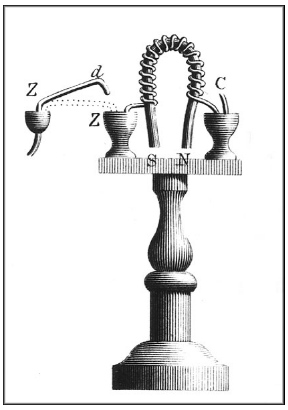
Tok vpliva na tok

Sila deluje tudi med samimi žicami s tokom. Dve navpično obešeni vzporedni žici se privlačita (se stisneta druga k drugi), če po njiju tečeta nasprotno usmerjena tokova, sicer se pa odbijata.

Med magneti in tokovi (gibajočimi se naboji) torej delujejo sile iste vrste kot med samimi magneti in zanje kar obdržimo ime magnetne sile. Očitno so odvisne od jakosti tokov in magnetov, od njihovih oblik in razsežnosti ter od medsebojnih leg. Vse to bomo morali raziskati.

Elektromagnet

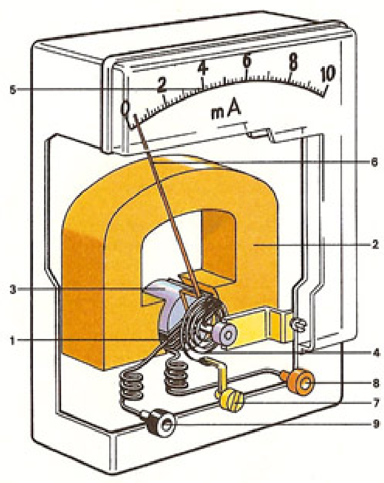
Če se tok do okolice vede kot magnet, kaj ne bi moral vplivati tudi na železo ali jeklo? Dolgo žico navijemo na valj; to je *tuljava*. Ko skoznjo spustimo tok, "postane" tuljava paličast *elektromagnet*: ako ji približamo železni žebelj, ga res potegne k sebi. Primerna železna palica, vstavljena v tuljavo, pa postane močno magnetna. Njen magnetizem izgine, ko izklučimo tok. Če namesto palice vstavimo jekleno iglo, se namagneti in magnetizem obdrži. Tako zlahka delamo magnetne igle.



Slika 24.13 Prvi elektromagnet. Posodice so kontakti z živim srebrom. Leva posodica služi kot stikalo. Magnet je z enočlensko baterijo dvignil pet kilogramov. (Sturgeon, 1824)

Tuljavni ampermeter

Magnetno silo izkoristimo za udobno merjenje toka. Med pola podkvastega magneta namestimo tuljavo. Ko skoznjo spustimo tok, nanjo delujejo magnetne sile, ki jo poskušajo zavrteti. Nasprotuje jim priključena spiralna vzmet. Zasuk tuljave kaže jakost toka skoznjo. S primerno oblikovanim magnetom je zasuk kar sorazmeren toku. To je *ampermeter*. Umerimo ga z elektroliznim etalonom: na baterijo priključimo zaporedno zvezano elektrolitsko kad in ampermeter. Skozi oba "porabnika" teče isti tok. Različne tokove dobimo z vključevanjem različnega števila baterijskih členov. Z umerjenim ampermetrom udobno merimo tokove skozi žice. Z zelo občutljivimi merilniki, ki imajo tuljavo obešeno na tanki žici, sežemo vse do 10^{-9} A.



Slika 24.14 Ampermeter – merilnik električnega toka. Vrtljiva tuljava (1) je nameščena med poloma magneta (2). Ustavlja jo spiralna vzmet (4). Zasuk tuljave je sorazmeren s tokom po njej. (Anon)

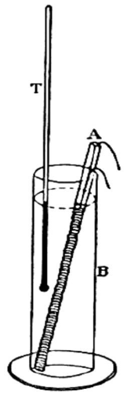
Balistični ampermeter

Kaj če skozi ampermeter spustimo naboj iz naelektrenega telesa v Zemljo? Kako se ampermeter sploh vede ob kratkih sunkih toka? To ugotovimo tako, da skozenj spuščamo pravokotne sunke znane jakosti in trajanja; pomagamo si z uro štoparico kot stikalom. Pokaže se, da je odklon kazalca sorazmeren s pretočenim nabojem $e = It$, če je le sunek kratek v primerjavi z nihajnim časom tuljave. S tem postane instrument merilnik naboja, *balistični ampermeter*. Z njim udobno merimo naboje na naelektrenih telesih. Ko razelektrimo "litrski" kondenzator, ki ga je nabil torni generator, izmerimo naboj $\sim 10^{-6}$ C. Torej celo najbolj nabita telesa vsebujejo izredno majhen neto naboj v primerjavi s tistim, ki ga električni člen v sekundi požene v žico.

24.9 Električna napetost

Grelni krog

Med pola baterije povežimo zaporedno ampermeter in dolgo žico, ki jo zaradi priročnosti zvijmo v spiralo. Po ustvarjenem krogu steče stalen tok, ki ga kaže ampermeter. Tok je odvisen od izbrane baterije, žice in celo ampermetra (ki je pravzaprav tudi kos žice): veččlenska baterija poganja večji tok; in skozi daljšo in tanjšo žico (iz iste snovi) teče manjši tok. Žica se pri tem greje; recimo ji kar grelec. Rahlo se greje tudi baterija in neznatno celo ampermeter. Pri dovolj tanki in dolgi grelni žici je segrevanje baterije in ampermetra zanemarljivo v primerjavi s segrevanjem grelca.



Slika 24.15 Segrevanje vode s tokom. (Joule, 1841)

Električno delo

Koliko toplote oddaja celotni krog, bi lahko v principu ugotovili tako, da bi ga potopili v vodo in merili porast njene temperature. V praksi pa uporabimo krog, kjer močno prevladuje grelec, in potopimo zgolj tega, ter računamo, kot da je potopljeno vse. Pri tem ugotovimo, da je povečanje notranje energije vode, ki ga kaže porast temperature, sorazmerno s pretočenim nabojem, kakor ga izmerita ampermeter in ura (JOULE):

$$cm\Delta T \propto It\,. \tag{24.5}$$

Sorazmernostni koeficient pove, koliko energije se sprosti v vodo, to je, koliko *električnega dela* prejmejo nosilci nabojev (elektroni in ioni) od baterije na enoto pretočenega naboja:

$$A = U_{\mathrm{g}} e\,. \tag{24.6}$$

Gonilna napetost

Koeficient U_{g} poimenujemo *gonilna napetost* uporabljene baterije. Večja kot je gonilna napetost, več dela vloži v enoto naboja, ko ga požene v tokokrog. Enoto napetosti, J/C, na kratko poimenujemo *volt* (V). Svežemu členu cink-oglje tako izmerimo napetost 1,5 V ne glede na to, kako sta veliki njegovi elektrodi. Drugi členi imajo podobne napetosti.

Sestavljanje napetosti

Zvežimo zapored dva člena tako, da poganjata tok v isto smer. Ko se skoznju pretoči naboj e, odda prvi člen delo $U_{\mathrm{g}1}e$ in drugi $U_{\mathrm{g}2}e$. Oba skupaj oddata delo $A = (U_{\mathrm{g}1}+U_{\mathrm{g}2})e$. Isto delo lahko izrazimo tudi z neznano celotno napetostjo, $A = U_{\mathrm{g}}e$. Izenačitev enač pove

$$U_{\mathrm{g}} = U_{\mathrm{g}1} + U_{\mathrm{g}2}\,. \tag{24.7}$$

Napetosti členov se seštejeta. Če sta člena obrnjena nasproti drug drugemu, se pa odštejeta. Baterija iz n enakih in enako usmerjenih členov kaže torej n-krat večjo napetost kot posamezni člen. Takšna baterija nam dobro služi kot etalon in vir znanih napetosti.

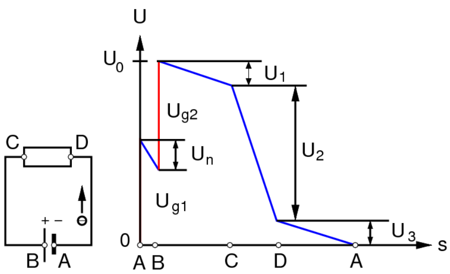
Padci napetosti

Namesto da merimo oddano toploto iz celotnega kroga, jo lahko izmerimo za vsak element posebej: grelec, baterijo in (v principu) ampermeter. Vsota oddanih energij je enaka celotni oddani energiji, vse preračunano na pretočeni naboj. Zdi se, kot da na vsak element, celo baterijo, "odpade" ustrezni del gonilne napetosti, $U_k = A_k/e$. Poimenujmo ga *padec napetosti*. Vsota vseh padcev napetosti vzdolž kroga je potemtakem enaka gonilni napetosti:

$$U_\mathrm{g} = \sum U_k\,. \tag{24.8}$$

Predstavljamo si, da gibljivi naboji organizirano padajo vzdolž vodnika, prav kakor kamni vzdolž klancev; oboji pri tem trkajo z okolico in jo segrevajo. Negativno elektrodo baterije proglasimo za "dno" klanca, pozitivno elektrodo pa za njegov "vrh". Zato "drsijo" pozitivni naboji po klancu navzdol in negativni po klancu navzgor. V elektrolitih se hkrati gibljejo pozitivni in negativni naboji, v kovinah pa le negativni. Vodniki so takorekoč "električno nagnjeni".

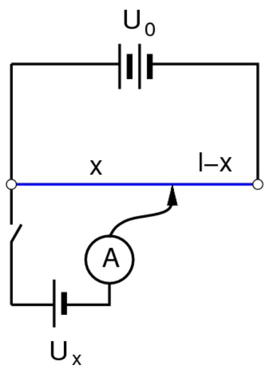
Potujoč v mislih od pozitivnega pola baterije vzdolž vodnika, se klanec napetosti stalno znižuje, le na dveh mestih – na vsakem polu baterije – se navpično dvigne. Dviga sta tolikšna, da klanec na koncu spet doseže svojo izhodiščno višino. Skupna višina obeh dvigov, to je gonilna napetost baterije. Višinska razlika klanca nad posameznim odsekom kroga, to pa je lokalni padec napetosti. Naboji na klancu drsijo – navzdol ali navzgor – zaradi lokalne strmine. Bolj globoka je, več toplote trošijo. Baterija pa v svoji notranjosti poganja pozitivne naboje na vrh in negativne na dno, dokler pač zmore.



Slika 24.16 Napetost vzdolž tokokroga. Na elektrodah baterije napetost zraste, na upornikih pade. Vsota porastov je enaka vsoti padcev. Gonilne napetosti so rdeče, padci napetosti modri.

Napetostni most

Vzdolž homogene žice s tokom je padec napetosti linearen. Če ga poznamo, lahko služi kot "merilni trak", ob katerem primerjamo neznano gonilno napetost. Postopamo takole. Med krajišči žice priključimo referentno baterijo z znano napetostjo. Žica je opremljena z drsnikom. Med drsnik in en konec žice priključimo merjeno baterijo in zaporedno zvezan ampermeter. Ni potrebno, da je kalibriran. Baterija je obrnjena tako, da poganja naboj v nasprotni smeri kot referentna baterija. Drsnik postavimo v lego, ko ampermeter ne kaže nobenega toka. Napetost merjene baterije znaša potem tolikšen delež referentne napetosti, kot znaša drsnikov odmik proti celi žici. Če napetosti referentne baterije ne poznamo dobro, jo najprej umerimo z znano etalonsko baterijo, začasno nameščeno na mestu merjenca.



Slika 24.17 Merjenje napetosti s kompenzacijo. Referentna baterija ustvarja na merilni žici linearen padec napetosti. Padec napetosti preko ustreznega odseka žice je enak napetosti merjenca. Tedaj skozi galvanometer ni toka.

Električna moč

Na časovno enoto prejeto električno delo definira *električno moč* $P = A/t$, torej

$$P = UI\,. \tag{24.9}$$

Z definicijsko enačbo za moč je določena tudi njena enota: $\mathrm{VA} = \mathrm{J/C} \cdot \mathrm{C/s} = \mathrm{W}$.

24.10 Električni upor

Električni upor

Kako – natanko – pa je jakost toka po grelcu odvisna od napetosti med njegovima priključkoma? Napetost nastavljamo z etalonsko baterijo in merimo tok z ampermetrom. Z dovolj dolgo in tanko žico v grelcu poskrbimo, da je segrevanje baterije in ampermetra zanemarljivo: padec napetosti na grelcu je potem kar enak etalonski napetosti. Pokaže se sorazmernost:

$$U = RI\,. \tag{24.10}$$

To je *zakon upornosti* (Ohm). Sorazmernostni koeficient R poimenujemo *električni upor* grelca in njegovo enoto V/A okrajšamo v *ohm* (Ω). Spiralna žica iz konstantana (zlitina 55 % bakra in 45 % niklja) z dolžino 10 m in s presekom 1 mm^2, priključena na napetost 1,5 V, prepušča tok 0,3 A in ima zato upor 5 Ω. Recipročno vrednost upora, $1/R$, poimenujemo prevodnost.

Specifični upor

Električni tok po žici spominja na vodni tok po cevi, polni mivke. Pričakujemo, da dvakrat daljša cev prepušča dvakrat manj toka, in da tudi skozi dvakrat manjši presek teče dvakrat manj toka. Poskus (z znano baterijo in ampermetrom) to potrdi: upor žice je takole odvisen od njene dolžine l, preseka S in materiala:

$$R = \xi\,\frac{l}{S}\,. \tag{24.11}$$

Snovno konstanto ξ poimenujemo *specifični upor*. Za konstantan znaša 0,49 Ω mm^2/m in za baker 0,018 Ω mm^2/m. Slednji je med vsemi kovinami, z izjemo srebra, najboljši prevodnik. Specifični upor snovi je odvisen od temperature in večinoma z njo narašča. Njegovo recipročno vrednost, $1/\xi$, poimenujemo specifična prevodnost.

Sestavljanje upornikov

Na baterijo lahko priključimo dva grelca z uporoma R_1 in R_2. Če sta priključena zaporedno, teče skoznju isti tok, njuna padca napetosti pa se seštevata: $U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I$. To pomeni, da je skupni upor enak

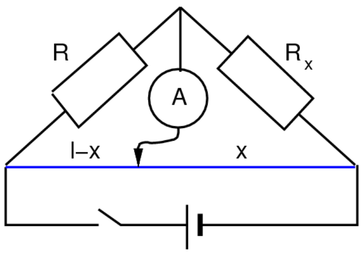
$$R = R_1 + R_2\,. \qquad (24.12)$$

Na vzporedno vezanih upornikih je padec napetosti enak, njuna tokova pa se seštevata: $I = U/R_1 + U/R_2 = (1/R_1 + 1/R_2)U$. To pomeni, da je skupni upor enak

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,. \qquad (24.13)$$

Uporovni most

Merilna žica z drsnikom ni samo napetostni, ampak tudi uporovni most. Z njim izmerimo neznani upor takole. Na žico (priključeno na poljubno baterijo) priključimo vzporedno vejo z dvema zaporednima upornikoma, enim znanim in drugim neznanim. Vmesno točko med upornikoma povežemo preko ampermetra z drsnikom. Ni potrebno, da je ampermeter kalibriran. Drsnik pomaknemo v lego, da tok ne teče. Tedaj je razmerje uporov enako razmerju ustrezajočih odsekov na žici.



Slika 24.18 Uporovni most – vezje za merjenje upornosti.

Trošena moč

Zaradi povezave med napetostjo in tokom je moč, ki se troši v vodniku, izrazljiva tudi kot

$$P = RI^2\,. \qquad (24.14)$$

Vodniki, v katerih teče enak tok, sipajo tem več moči, čim večji upor imajo. Zdaj razumemo, zakaj se baterija in ampermeter v krogu z "močnim" grelcem skoraj nič ne segrevata: skozi vse teče enak tok, a njuna upora sta mnogo manjša kot upor grelca.

24.11 Meritve vezij

Vezja, sestavljena iz električnih izvirov, porabnikov in vodnikov, so popolnoma določena, če poznamo tokove in napetosti v njih. Oboje je potrebno meriti.

Upor in vezava ampermetra

Ampermeter je upornik, ki kaže tok skozi samega sebe. V tokovno vejo ga vključimo tam, kjer hočemo meriti jakost toka. Žal pri tem v vejo vnesemo dodatni zaporedni upor in zato zmanjšamo prvotni tok. Da motnja ni prevelika, mora biti notranji upor ampermetra čim manjši. Izmerimo ga, na primer, takole.

Na baterijo priključimo zaporedno zvezana upornik in ampermeter. Upornik izberemo tako, da kaže ampermeter maksimalni odklon. Potem vzporedno k ampermetru vežemo spremenljivi upor in ga večamo, dokler se odklon ne zmanjša na polovico. Upor spremenljivega upornika je tedaj enak notranjemu uporu ampermetra.

Tuljava v tipičnem ampermetru se polno odkloni pri toku 1 mA, pri čemer je na njej padec napetosti 100 mV. Notranji upor torej znaša 100 Ω. Če hočemo meriti večje tokove, naredimo obvod mimo tuljave. Njegov upor mora biti manjši od upora tuljave, da bo mimo nje stekla (izračunljiva) večina toka. Razmerje obeh tokov – skozi tuljavo in mimo nje – je enako obratnemu razmerju uporov. Obvodni upor 0,1 Ω, na primer, spelje mimo tuljave, pri polnem odklonu, 1 A toka.

Upor in vezava voltmetra

Zaradi sorazmernosti med tokom in napetostjo lahko ampermeter uporabimo tudi za merjenje napetosti; poznati moramo le njegov notranji upor. Obstoječo skalo toka preračunamo v skalo napetosti. Dobimo *tuljavni voltmeter*.

Voltmeter je upornik, ki kaže napetost na samem sebi, ko skozenj teče tok. Vključimo ga med dve točki na tokovni veji, med katerima hočemo izmeriti napetost. Žal s tem v vejo vnesemo dodatni vzporedni upor in zato zmanjšamo tok ter napetost. Da motnja ni prevelika, mora biti notranji upor voltmetra čim večji. To dosežemo tako, da pred tuljavo vežemo predupornik.

Notranji upor izmerimo podobno kot pri ampermetru. Na baterijo priključimo voltmeter. Baterijo izberemo tako, da je odklon kazalca primerno velik. Potem zaporedno k voltmetru priključimo spremenljivi upornik in ga večamo, dokler se odklon ne zmanjša na polovico. Upor spremenljivega upornika je tedaj enak notranjemu uporu voltmetra.

Tuljava v tipičnem voltmetru je enaka kot tuljava v tipičnem ampermetru. Z njo torej merimo do 100 mV in ima upornost 100 Ω. Če hočemo meriti večje napetosti, moramo pred tuljavo priključiti predupornik. Njegov upor mora biti večji od upora tuljave, da nase prevzame večinski delež napetosti. Razmerje obeh napetosti – na preduporu in tuljavi – je enako razmerju obeh uporov. Predupor 10 kΩ, na primer, prevzame nase, pri polnem odklonu, 10 V napetosti.

Upor in uporaba baterije

Baterija sicer potiska tok po krogu, vendar se mu, ko teče skoznjo, tudi sama upira. Predstavljamo si, da je sestavljena iz vira gonilne napetosti U_{g} in iz zaporedno vezanega notranjega upora R_{N}. Ko na elektrodi priključimo zunanji upor R, steče tok I in velja

$$U_{\mathrm{g}} = (R_{\mathrm{N}} + R)I\,. \tag{24.15}$$

Če je R_{N} veliko manjši od R, ga lahko zanemarimo. Tedaj je gonilna napetost baterije res kar enaka padcu napetosti na zunanjem uporniku. V nasprotnem primeru pa se gonilna napetost porazdeli na oba upornika. Med priključkoma baterije potem vlada "terminalska" napetost $U_0 = (U_\mathrm{g} - R_\mathrm{N} I) = RI$. Večji ko je tok, manjša je ta napetost. Baterija je tem boljša, čim manjši notranji upor ima.

Gonilne značilnosti baterije določimo takole. Na baterijo priključimo dve vzporedni veji: v eni je voltmeter in v drugi zaporedno zvezana ampermeter in spremenljivi upor. Spreminjamo upor in beležimo tok in terminalsko napetost. Potem narišemo graf $U_0(I)$ in iz njega določimo gonilno napetost, maksimalni tok in notranji upor. Kot palec velik člen cink-oglje ima gonilno napetost 1,5 V in notranji upor 0,5 Ω. Če ga kratko staknemo, teče skozenj tok 3 A.

S prečrpanim nabojem se gonilna napetost manjša in notranji upor povečuje. Ustrezno upada tudi terminalska napetost. Rečemo, da se baterija "izprazni". Že omenjeni člen tehta 50 gramov in lahko pretoči naboj 1 Ah, preden obnemore. To pomeni, da poganja tok 1 A celo uro, ali tok 0,1 A celih 10 ur. Energija, ki jo pri tem člen odda, je približno takšna, kot če bi padal z višine 10 km. Enako težek kos premoga vsebuje stokrat več sežigne toplote. □

25 E & M polje

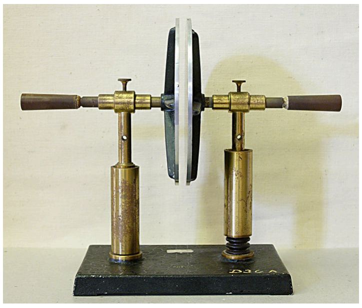
Električno polje – Jakost polja in naboji – Influenčne meritve polja – Magnetno polje – Indukcija napetosti – Indukcijske meritve polja – Jakost polja in tokovi – Električni generator – Izmenični tok – Energija polj – Nihajni krog

25.1 Električno polje

Viri električnega toka – baterije – ter merilniki za naboj, tok in napetost – tuljavni ampermetri in voltmetri – omogočajo kvantitativne raziskave električnih in magnetnih pojavov, zlasti električnih in magnetnih sil, ki smo jih kvalitativno že spoznali.

Električno polje

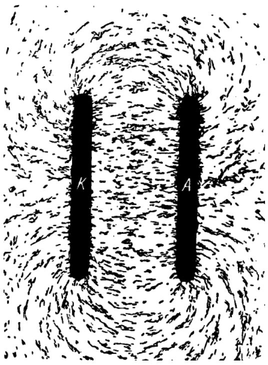
Dober pripomoček za preučevanje naelektrenja sta dve kovinski krožni plošči s ploščino po S na razmaku l, ki je mnogo manjši od njunega premera. To je *ploščati kondenzator*. Namestimo ga tako, da sta plošči navpični, in mednju obesimo slamnato iglo. Ta mirno obvisi. Nato z dotikom mnogočlenske baterije z znano napetostjo U naelektrimo plošči kondenzatorja z nasprotno enakima, a še neznanima nabojema e in $-e$. Zaradi influence nabojev na igli se ta usmeri proti obema ploščama. Prostor med ploščama nabitega kondenzatorja se je očitno spremenil: v njem so začele delovati električne sile. Rečemo, da je nastalo *električno polje*. Električno polje, to je prostor, v katerem delujejo električne sile.



Slika 25.1 Ploščati kondenzator za demonstracijske poskuse. (School Historical Museum, Bremerhaven)

Električne silnice

Za boljšo predstavo o električnem polju nadomestimo slamnato iglo z iglicami mavca, ki jih raztrosimo po vodoravni kartonski plošči skozi kondenzator. Iglice se zaradi influence nabojev uredijo v črte. Rečemo, da so to *električne silnice*. Konci silnic so pravokotni na plošči. Povsod v kondenzatorju so silnice ravne in enakomerno goste; rečemo, da je tam polje *homogeno*. Ob robovih pa so silnice ukrivljene in neenakomerne; tam je polje *nehomogeno*. Silnice so nazorna slika električnega polja. Močno spominjajo na tokovnice pri pretakanju tekočin. Podobnost še povečamo: deklariramo, da silnice *izvirajo* iz nabojev na pozitivni plošči in da *ponikajo* v naboje na negativni plošči. S tem definiramo tudi delovanje polja na naboje v njem: pozitivni naboji čutijo silo v smeri silnic in negativni v nasprotni smeri. Kjer so silnice gostejše, je sila večja.



Slika 25.2 Električno polje med dvema nasprotno nabitima ploščama. Polje je vidno zaradi natrosenih iglic iz mavca, ki postaneje električni dipoli in se obrnejo v smer električnih silnic. (Pohl, 1969)

Električna poljska jakost

Glavna lastnost električnega polja je, da izvaja sile na vanj potopljene naboje. Na naboj e, ki se giblje od ene plošče kondenzatorja do druge po ravni notranji silnici, deluje stalna sila F_e in mu podeli delo $F_e l = Ue$. To pomeni, da je električna sila nanj

$$F_e = eE \tag{25.1}$$
$$E = \frac{U}{l} \, .$$

Količino E poimenujemo *električna poljska jakost*. To je sila na enoto testnega naboja. Njena enota je bodisi N/C ali V/m. Jakost polja v kondenzatorju je v vsaki točki enaka in je enolično določena z napetostjo in razmikom plošč.

Definicijo jakosti polja kot sile na enoto naboja razširimo na polja okrog poljubnih teles, med katerimi vlada napetost, recimo med kroglo tornega generatorja in stenami sobe. Seveda pa je v takih primerih jakost polja od točke do točke različna in tudi ne velja več zapisana odvisnost od okolišnjih napetosti. V principu lahko izmerimo jakost poljubnega polja v vsaki točki kar po definiciji: preko sile na izbrani testni naboj. V praksi pa je takšno – neposredno – merjenje večinoma neizvedljivo. Med drugim moti, da vnos testnega naboja spremeni razporeditev izvorov polja, kar je treba upoštevati.

25.2 Jakost polja in naboji

Polje v ploščatem kondenzatorju je povsem določeno z napetostjo med ploščama, alternativno pa tudi z nabojem na njima. Kakšna je povezava med obojim?

Polje med naboji

S priključenim voltmetrom ugotovimo, da se napetost med ploščama, ki ju razmaknemo, poveča. Pri tem ostaja razmerje U/l – *gradient napetosti* – nespremenjeno, a le pri majhnih premikih, dokler ostaja polje homogeno. Ko si predstavljamo dva enaka in enako nabita kondenzatorja drugega ob drugem in ju v mislih staknemo, pa uvidimo, de je tudi razmerje e/S – *ploskovna gostota naboja* – konstantno. Opisani razmerji morata biti med seboj povezani. Kako, raziščemo z meritvijo. Naboj na plošči izmerimo z balističnim ampermetrom in ugotovimo

$$\frac{e}{S} = \varepsilon_0 \frac{U}{l} \qquad (25.2)$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}\,.$$

Dobljeni koeficient poimenujemo *električna konstanta*. Pri ploščini $1\,\mathrm{dm}^2$, razmaku 1 cm in pritisnjeni napetost 100 V znaša naboj okrog 10^{-9} As, kar je ravno še merljivo.

Najdena povezava pomeni, da lahko električno poljsko jakost znotraj kondenzatorja izrazimo tako preko napetosti na ploščah, $E = U/l$, kot tudi z nabojem na njih, $\varepsilon_0 E = e/S$.

Kapaciteta kondenzatorja

Opisani poskus s ploščatim kondenzatorjem kaže, da je naboj na njegovih ploščah sorazmeren z napetostjo:

$$e = CU \qquad (25.3)$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{l}\,.$$

Količina C pove, koliko naboja na ploščo potisnemo z enoto napetosti. Temu ustrezno jo poimenujemo *kapaciteta*. Njeno enoto C/V okrajšamo v *farad* (F).

Če kondenzator ni ploščat, še vedno velja sorazmernost med nabojem in napetostjo: delo električne sile na testni naboj vzdolž poljubne silnice, torej napetost, je namreč zmeraj sorazmerno z nabojema, ki čepita na koncеh silnice. Le kapaciteto moramo izmeriti, ker se je večinoma ne da več izračunati. Kvadratni čevelj veliki plošči na razdalji 1 mm imata kapaciteto $\sim 1\mathrm{O}^{-9}$ farada. Ko sta nabiti s tornim generatorjem na napetost 1000 V, vsebujeta 10^{-6} As naboja. Pri nekajkrat višji napetosti zrak med ploščama ne izolira več dovolj, ampak pride do preboja nabojev.

Dielektričnost snovi

Morda na kapaciteto kondenzatorja kaj vpliva prisotnost snovi med ploščama? Vtaknimo med obe plošči prilegajočo se stekleno šipo! Napetost med njima upade za faktor ε. Kondenzator, popolnoma zapolnjen z izolatorjem, recimo steklom, ima torej kapaciteto glede na "zračni" kondenzator povečano za faktor ε:

$$C_{\mathrm{full}} = \varepsilon C\,. \qquad (25.4)$$

Poimenujemo ga *dielektričnost* dotične snovi. Za razne vrste stekla znaša 5–10 in za destilirano vodo 80. Ker je tudi zrak snov, je potrebno preveriti še kapaciteto izsesanega kondenzatorja. Pokaže se, da je enaka, kot če bi bil napolnjen z zrakom. Zato lahko za referenco obdržimo kar zračni kondenzator namesto brezzračnega.

Dielektričnost snovi si razlagamo tako, da se v njenih molekulah razmakneta težišči pozitivnega in negativnega naboja v smeri polja. Tiste molekule, v katerih sta težišči nabojev že ločeni, pa se zavrtijo v smer polja. Inducirani naboji se v notranjosti izolatorja izravnajo, na površini pa ne in tam se pojavi vezani površinski naboj. Ta "razredči" obstoječi naboj na ploščah in s tem zmanjša napetost med njima.

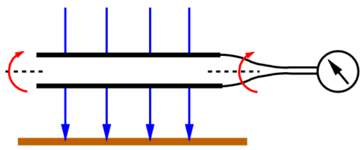
25.3 Influenčne meritve polja

V poljubnem električnem polju je vsak dovolj majhen del homogen. Za tak del si mislimo, da ga ustvarja ustrezno nabit lokalni ploščati kondenzator. Kako bi določili, kakšen neki bi bil ta namišljeni kondenzator?

Influenčni kondenzator

Na željeno mesto vtaknemo kondenzator s staknjenima ploščama; zunanje polje influencira naboje v njiju tako, da se ena naelektri pozitivno in druga negativno. Plošči razmaknemo in naboja ostaneta ločena. Influenciranega je natanko toliko naboja, da je njegovo polje nasprotno enako zunanjemu polju; neto polje je torej nič. Sedaj le še odstranimo plošči, izmerimo naboj na njiju (z balističnim ampermetrom) in izračunamo poljsko jakost. Pri opisanem influenčnem merjenju je treba poiskati pravo usmeritev staknjenih plošč – tisto, kjer je influencirani naboj največji.

Stikanje in razmikanje plošč je nerodno. Bolj priročno je, če uporabimo kar navaden kondenzator z razmaknjenima ploščama, vendar vrtljiv okoli vzdolžne osi. Plošči naj bosta povezani preko balističnega ampermetra. Kondenzator zavrtimo za četrt obrata tako, da sta plošči najprej pravokotni in nato vzporedni zunanjemu polju. Balistični ampermeter pokaže pretočeni naboj. S tem je določena tudi električna poljska jakost.



Slika 25.3 Na (povezanih) ploščah kondenzatorja v električnem polju Zemlje se influencirajo naboji. Ko ga zavrtimo za 90 stopinj, se naboji izravnajo. Polje je sorazmerno s tokovnim sunkom.

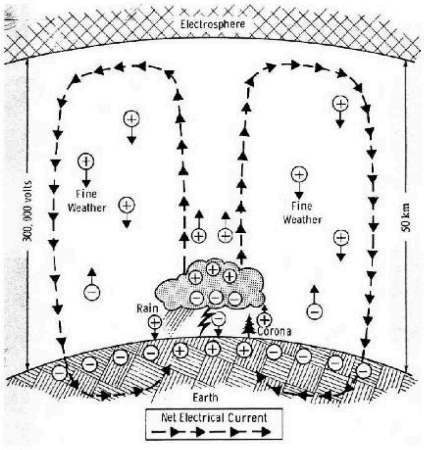
Električno polje Zemlje

Ko z zasučnim kondenzatorjem pretipamo okolico, ugotovimo, da pravzaprav živimo sredi električnega polja. V lepem vremenu je polje usmerjeno iz višine proti tlom in njegova jakost pri tleh znaša okrog 100 V/m. Zakaj potem skozi nas ne teče tok? Zato, ker tvori naše telo skupaj z Zemljo enoten prevodnik in je napetost med vrhom glave in podplati enaka nič.

Zemeljska površina ima torej negativne naboje; kje nad njo so potem pozitivni naboji? Morda na zvezdah? Če bi bilo to res, bi moralo biti električno polje v prvih višinskih kilometrih nad morjem praktično konstantno. To pa ni res, saj meritve kažejo, da do 10 km višine jakost polja že močno pade. Pozitivni nosilci morajo torej plavati po ozračju. Očitno so to raznovrstni pozitivni ioni.

Nevihtni oblak kot generator toka

Presežek pozitivnih nabojev iz ozračje nenehno teče v tla in tamkaj nevtralizira negativne naboje. Kaj pa nadomešča izgubljene negativne naboje v tleh in pozitivne v ozračju? Nevihtni oblaki!



Slika 25.4 Električni naboji in tokovi v ozračju. Nevihtni oblak je torni generator, ki ustvarja pozitivne ione na vrhu in negativne na dnu. Nastali ioni se izravnavajo kot električni tokovi skozi ozračje. (Penn State University)

V nevihtnem oblaku se padajoče kapljice tarejo ob zrak in se negativno naelektrijo, za sabo pa puščajo pozitivne naboje. Vrh oblaka tako postaja pozitivno naelektren, dno oblaka pa negativno. Višinski pozitivni naboj se širi z vetrom v okolico in nižinski negativni z dežjem na tla. V tleh pod oblakom se tudi influencira pozitivni naboj in pogosto se zgodi, da negativni naboj udari skozi zrak iz oblaka v tla. To je blisk. Nevihtni oblak torej deluje kot torni električni generator, ki ločuje "sprijete" naboje in jih kopiči na elektrodah.

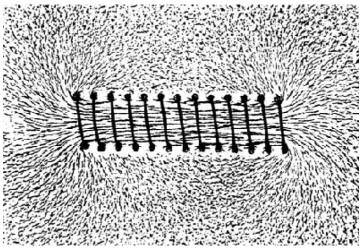
25.4 Magnetno polje

Magnetno polje

Dober pripomoček za preučevanje magnetizma je tuljava, ki je mnogo daljša od svojega premera. To je *dolga tuljava*. Namestimo jo vodoravno in vanjo vtaknemo magnetno iglo. Ta se usmeri proti severu. Nato priključimo baterijo, po tuljavi steče tok in igla se, po pričakovanju, usmeri vzdolž njene osi. Prostor v notranjosti tuljave se je očitno spremenil: v njem so začele delovati magnetne sile (poleg že obstoječih). Rečemo, da je nastalo *magnetno polje*. Magnetno polje, to je prostor, v katerem delujejo magnetne sile.

Magnetne silnice

Za boljšo predstavo o magnetnem polju nadomestimo iglo magnetnico z železovimi opilki, ki jih raztresemo po vodoravni kartonski plošči skozi tuljavo. Iglice se zaradi indukcije elementarnih magnetov v njih uredijo v črte. Rečemo, da so to *magnetne silnice*. Vzdolž osi tuljave so silnice ravne in enakomerno goste; rečemo, da je tam polje homogeno. Na vsakem koncu tuljave se silnice ne končajo, ampak se po zunanji strani vračajo na nasprotni konec. Silnice so nazorna slika magnetnega polja. Medtem ko električne silnice izvirajo in ponikajo v naboje ter imajo tam začetek in konec, so magnetne silnice sklenjene same vase ter obkrožajo tokove. Tudi njim pripišemo smer: tja, kamor kaže severni pol lokalne magnetnice. Kjer so silnice gostejše, je navor sile na magnetnico večji.



Slika 25.5 Magnetno polje tuljave, po kateri teče električni tok, ki ga poganja baterija izza ozadja. Polje je vidno zaradi opilkov iz železa, ki postanejo magnetni dipoli in se obrnejo v smer silnic. (Pohl, 1969)

Magnetna poljska jakost

Glavna lastnost magnetnega polje je, da izvaja sile na vanj potopljene vodnike s tokom. Tuljavo postavimo navpično in vanjo, kot gugalnico, obesimo vodnik z dolžino l. To je seveda posnemanje že znanega poskusa z gugalnico med navpičnima poloma podkvastega magneta [24.8]. Ko po gugalnici spustimo tok z jakostjo I, se pričakovano odkloni. Razmislek pravi in poskus potrdi, da je sila sorazmerna z jakostjo toka in z dolžino prečke:

$$F_\mathrm{m} = BIl\,. \tag{25.5}$$

Sorazmernostni koeficient B je od tuljave do tuljave – ter od magneta do magneta – različen in ga poimenujemo *magnetna poljska jakost*. Pove, kako je polje močno, to je, s kako silo deluje na vodnik testne dolžine in testnega toka. Ustrezna enota je N/Am.

Merjenje z gugalnico je nerodno. Namesto nje raje uporabimo tokovno zanko ali – še bolje – ploščato tuljavo s presekom S. Postavimo jo pravokotno na magnetno polje. To je seveda posnemanje ampermetra na vrtljivo tuljavo med poloma podkvastega magneta [24.8]. Mislimo si, da ima tuljava le en ovoj v obliki pravokotnika $l \cdot b$. Vrtita ga magnetni sili na dveh nasprotnih stranicah dolžine l, vsaka z navorom $BIl \cdot b/2$, to je $BIS/2$. Na zanko deluje torej celotni navor

$$M_\mathrm{m} = BIS\,. \tag{25.6}$$

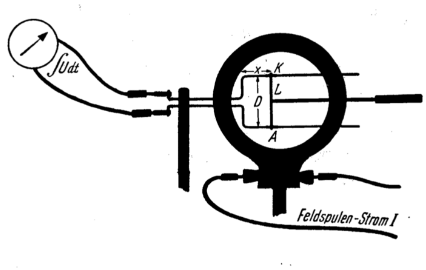
Zapisani navor velja tudi za zanko poljubne oblike, saj si jo lahko mislimo sestavljeno iz samih pravokotnih odsekov. Navor na tuljavo z N ovoji pa je seveda N-krat večji.

25.5 Indukcija napetosti

Gugalna prečka v magnetnem polju se premakne, ko skoznjo steče tok. Je morda res tudi obratno? Morda premik prečke skozi magnetno polje po njej požene tok?

Kinematična indukcija

V navpično postavljeno tuljavo potisnemo na isti višini dva vzporedna vodoravna vodnika na medsebojni razdalji l in ju priključimo na voltmeter. Na vodnika nataknemo drsno prečko. Oba vodnika in prečka tvorijo zanko, skozi katero se "pretaka" magnetno polje. Recimo ji kar pretočna zanka. Ko premikamo prečko, voltmeter res pokaže napetost!



Slika 25.6 Kinematična indukcija. V zanki, ki se ji spreminja presek, skozi katerega teče nespremenljivo magnetno polje, se inducira napetost. (Pohl, 1969)

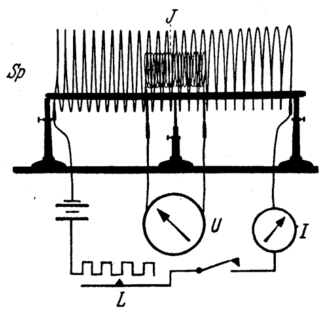
V mislih premikajmo prečko enakomerno s hitrostjo v. Po pretočni zanki vlada inducirana napetost U_i, ki poganja tok I. Sila F, s katero premikamo prečko, je nasprotno enaka magnetni sili $F_m = BIl$, s katero nanjo deluje magnetno polje. Moč, ki jo prečka prejema od roke, je Fv, in moč, ki jo oddaja toku, je $U_i I$. Energija sistema se ohranja, zato sta moči enaki in velja $U_i = Blv$. Produkt lv je pravzaprav sprememba ploščine pretočne zanke v časovni enoti, zato

$$U_i = B_\perp \frac{dS}{dt}\,. \tag{25.7}$$

Inducirana gonilna napetost po zanki je sorazmerna s hitrostjo spreminjanja preseka zanke, ki ga prebadajo magnetne silnice. To je *kinematična indukcija* napetosti. Z njo je določena tudi enota za jakost magnetnega polja, Vs/m^2, kar je seveda isto kot dosedanja enota N/Am. Na kratko ji bomo rekli tudi *tesla*, T.

Dinamična indukcija

Morda bi se v zanki inducirala gonilna napetost tudi takrat, ko bi bila zanka pri miru, a bi se spremenila jakost magnetnega polja, ki jo prebada?



Slika 25.7 Dinamična indukcija. V togi in nepremični zanki, skozi katero teče spremenljivo magnetno polje, se inducira napetost. (Pohl, 1969)

Naredimo poskus: v veliko tuljavo vstavimo manjšo; ko izključimo tok v veliki tuljavi, se njeno polje iz poznane vrednosti zmanjša na nič in na priključkih male tuljave se pojavi sunek napetosti. Tega izmerimo z balističnim voltmetrom. Podobno je, ko veliko tuljavo vključimo. Indukcijski zakon sedaj zapišemo za eno zanko kot

$$U_i = S \frac{dB_\perp}{dt}\,. \tag{25.8}$$

To je *dinamična indukcija*. Razlagamo si jo tako, da se spremenljivo magnetno polje obda z električnim poljem. Okrog spreminajočega se snopa magnetnih silnic se pojavi krožni ovoj električnih silnic. Merilna zanka je zgolj pripomoček, ki to pokaže.

Obe vrsti indukcije lahko združimo v *indukcijski zakon* (Faraday)

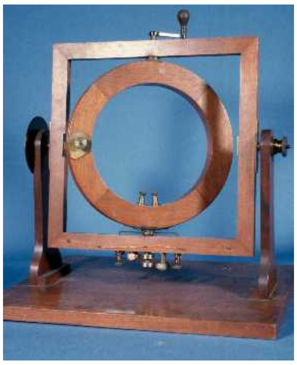
$$U_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(B_\perp S)\,. \tag{25.9}$$

S tem smo definirali količino $\Phi_\mathrm{m} = B_\perp S$, ki jo poimenujemo *magnetni pretok*. Indukcijski zakon torej pravi: inducirana napetost po zanki, mirujoči ali gibljivi, je enaka časovni spremembi magnetnega pretoka skoznjo.

25.6 Indukcijske meritve polja

Indukcijska zanka

Z indukcijskim zakonom lahko določamo magnetno poljsko jakost iz meritev inducirane napetosti namesto iz meritev sil. V preiskovano polje vstavimo kratko tuljavo s presekom S in številom navojev N; tuljava mora biti pravokotna na silnice. Potem jo hitro potegnemo ven iz polja ali – bolje – zasukamo za 90 stopinj, ter merimo sunek napetosti med njenima priključkoma. Inducirana napetost je v vsakem trenutku enaka vsoti napetosti po posameznih zankah oziroma navojih. Iz izmerjenega sunka napetosti pa izračunamo jakost polja.



Slika 25.8 Meritev magnetnega polja z indukcijo. Prikazana je tuljava za merjenje zemeljskega magnetizma. Z vodoravno postavljeno tuljavo in zasukom za 180 stopinj merimo dvakratnik navpične komponente polja in obratno. (Wesleyan University)

Jakost magnetov

Z zasučno tuljavo izmerimo ob polu močnega podkvastega magneta jakost $10^{-2}\,\mathrm{Vs/m^2}$.

Na površini Zemlje, v Ljubljani, izmerimo polje $10^{-5}\,\mathrm{Vs/m^2}$. Na obeh magnetnih polih je polje še nekajkrat močnejše.

25.7 Jakost polja in tokovi

Polje med tokovi

V tuljavi, ki je mnogo daljša od premera, ki ima N ovojev na enoto dolžine l in po kateri teče tok I, je polje homogeno; meritev z indukcijsko tuljavo pokaže

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} \tag{25.10}$$

$$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Vs/Am}\,.$$

Sorazmernostno konstanto poimenujemo *magnetna konstanta*. Njena vrednost je odvisna od elektrolizne definicije toka. "Normalna" tuljava s 100 ovoji na 1 decimeter, po kateri teče tok 1 A, ima v notranjosti polje okrog $10^{-3}\,\mathrm{Vs/m^2}$. To je desetkrat manj od podkvastega magneta in stokrat več od Zemlje kot magneta.

Induktivnost tuljave

Sprememba toka po tuljavi povzroči spremembo njenega magnetnega polja, ta pa inducira napetost v lastnih ovojih. Napetost je taka, da nasprotuje spremembi toka. Indukcijski zakon pove $U_\mathrm{i} = N \cdot S\,\mathrm{d}(\mu_0 NI/l)/\mathrm{d}t$, torej

$$U_\mathrm{i} = L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad (25.11)$$
$$L = \mu_0 N^2\,\frac{S}{l}\,.$$

Koeficient L poimenujemo *induktivnost* tuljave. Njeno enoto Vs/A okrajšamo v *henry* (H). Enačba velja tudi za drugačne tuljave, le njihove induktivnosti večinoma ne moremo izračunati, ampak jo je treba izmeriti. Čevelj dolga in dva palca široka tuljava z enim navojem na milimeter ima induktivnost $\sim 10^{-3}$ henryja.

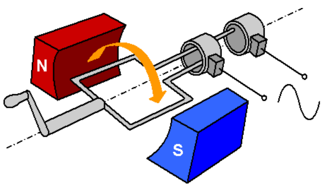
Permeabilnost snovi

Če tuljavo zapolnimo s kakšno snovjo, se ji induktivnost poveča za faktor μ. Rečemo, da je to *permeabilnost* snovi. Večina snovi ima permeabilnost neznatno večjo ali manjšo od 1. Redka izjema je železo, kjer dosega vrednosti do 10^3. Predstavljamo si, da se v železu atomarni tokovni magneti usmerijo vzdolž magnetnega polja in ga s tem okrepijo. Permeabilnost železa je tudi sicer nekaj posebnega: odvisna je od tega, koliko in v kateri smeri je bilo pred meritvijo železo namagneteno.

25.8 Električni generator

Izmenični dinamostroj

Kinematično indukcijo izkoristimo kot priročen vir elektrike. Najpreprostejši je naslednji način. Med poloma stalnega magneta – v homogenem polju z jakostjo B – enakomerno vrtimo, na primer z naftnim motorjem, tuljavo s presekom S in številom navojev N. Po njej se inducira gonilna napetost U_i. Konca tuljave sta spojena z dvema obročema na vrtilni osi. Obročev se dotikata dve drsni krtači, ki služita kot izhodna priključka.



Slika 25.9 Shema dinamostroja za izmenično napetost. Stroj temelji na kinematični indukciji. (Museu das Comunicacoes de Macau, Macau)

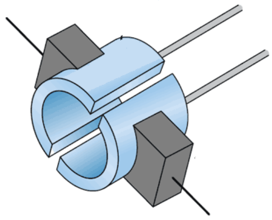
To je *dinamostroj*. Inducirana napetost je enaka vsoti napetosti po posameznih navojih. Če se tuljava vrti s krožno frekvenco ω, nudi polju spremenljiv presek $S\cos\omega t$ (čas začnemo šteti, ko je presek tuljave pravokoten na polje), zato niha napetost na njej kot

$$U_\mathrm{i} = U_0 \sin \omega t \qquad (25.12)$$
$$U_0 = NBS\omega \,.$$

Rečemo, da je to *izmenična napetost*. Njen graf je sinusoida. Velikost in frekvenca izmenične napetosti je odvisna od uporabljanega generatorja.

Enosmerni dinamostroj

Lepo bi bilo imeti še generator za enakomerno napetost. Morda lahko preoblikujemo izmeničnega? Da: dva drsna obroča nadomestimo z dvema polobročema, postavljenima drug proti drugemu.



Slika 25.10 Odvzemna priključka – komutator – ki izmenični dinamostroj prilagodita za enosmerno napetost. (Anon)

Napetost na odvzemnih ščetkah se z vrtenjem tuljave spreminja kot $U = U_0\,|\sin \omega t|$. To je že enosmerna, a še vedno spremenljiva napetost. Opazno jo zgladimo tako, da namesto ene tuljave in dvodelnega kolektorskega obroča nataknemo na os dve pravokotni tuljavi, povezani s štiridelnim kolektrskim obročem. Še več tuljav zgladi napetost prav do $U = U_0$.

Transformator

Izmenični tok ima pred istosmernim veliko prednost: ko teče skozi tuljavo, ustvarja v njej in okrog nje spreminjajoč se magnetni pretok. Če tega prestrežemo z drugo tuljavo, se v njej inducira izmenična napetost in – če je sklenjena – po njej steče izmenični tok. V praksi nataknemo tuljavi na skupno železno jedro, ki pretok ojača. To jedro je sestavljeno iz tankih, na eni strani izoliranih lamel, da preprečimo indukcijo močnih tokov v njem.

Slika 25.11 Transformator – pretvornik napetosti. Temelji na dinamični indukciji. Prikazan je prvi transformator za "laboratorijske" poskuse, ki ga je sestavil M. Faraday. (Science Museum, London)

Razmerje med napetostima na prvi (primarni) in nesklenjeni drugi (sekundarni) tuljavi znaša:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \,. \qquad (25.13)$$

To je *transformator*. Z njim pretvarjamo visoke napetosti v nizke in obratno. Ko sekundarno tuljavo obremenimo, pa je razmerje obeh tokov in napetosti določeno z ohranitvijo energije:

$$U_1 \mathrm{I}_1 = U_2 I_2 \,. \tag{25.14}$$

Dinamostroj s priključenim transformatorjem, ki ima več sekundarnih odcepov, ali celo drsni odcep, je priročen vir izmeničnih napetosti.

25.9 Izmenični tok

Kakšen tok pa teče skozi porabnik, če ga priključimo na vir izmenične napetosti?

Skozi upornik

Izmenična napetost na uporniku poganja skozenj tok zdaj sem, zdaj tja. Tok je v vsakem trenutku sorazmeren z napetostjo, $U = RI$. Naj bo napetost $U = U_0 \sin \omega t$, potem $I = I_0 \sin \omega t$ in $U_0 = RI_0$. Tok torej niha sočasno z napetostjo. Trošena moč je v vsakem trenutku enaka $P = UI$, torej $P = P_0 \sin^2 \omega t$ in $P_0 = U_0 I_0$. Tudi moč niha sočasno s tokom in napetostjo. Povprečna moč, definirana kot $P_{\mathrm{ave}} \cdot T = \int_0^T P \,\mathrm{d}t$, znaša $P_{\mathrm{ave}} = U_0 I_0 / 2$. Če definiramo efektivno napetost in efektivni tok

$$U_{\mathrm{ef}} = U_0/\sqrt{2} \qquad I_{\mathrm{ef}} = I_0/\sqrt{2}\,, \tag{25.15}$$

lahko zapišemo

$$P_{\mathrm{ave}} = U_{\mathrm{ef}} I_{ef} \qquad U_{\mathrm{ef}} = R I_{\mathrm{ef}}\,. \tag{25.16}$$

Skozi kondenzator

Izmenična napetost na kondenzatorju kopiči naboj zdaj na eni, zdaj na drugi plošči, vmes pa se gradi in izginja električno polje. Naboj je v vsakem trenutku sorazmeren z napetostjo, $e = CU$. Naj bo napetost $U = U_0 \sin \omega t$, potem $e = CU_0 \sin \omega t$. Odvod naboja po času je tok, torej $I = I_0 \cos \omega t$ in $I_0 = U_0 C \omega$. Tok torej niha, vendar ne sočasno z napetostjo, ampak jo prehiteva za četrt nihaja: ko je tok maksimalen in začne pojemati, je napetost nič in začenja rasti. Efektivna napetost in efektivni tok pa sta povezana takole:

$$U_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{C\omega} I_{\mathrm{ef}}\,. \tag{25.17}$$

Kondenzator torej kaže *kapacitivni upor* $R_{\mathrm{C}} = 1/C\omega$. Trošena moč je zaradi zamika med tokom in napetostjo enaka nič.

Skozi tuljavo

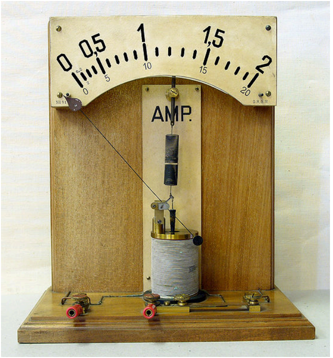
Izmenična napetost na tuljavi potiska tok skoznjo zdaj v eno, zdaj v drugo smer, vmes pa se gradi in izginja magnetno polje. Če je upor tuljave majhen, je napetost na njej enaka inducirani napetosti; odvod toka je potem v vsakem trenutku sorazmeren z napetostjo, $U = L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Naj bo tok $I = I_0 \sin \omega t$, potem $U = U_0 \cos \omega t$ in $U_0 = I_0 L \omega$. Tok torej niha, vendar zaostaja za napetostjo za četrt nihaja. Efektivna napetost in tok sta povezana takole:

$$U_{ef} = L\omega I_{ef}\,. \tag{25.18}$$

Tuljava torej kaže *induktivni upor* $R_L = L\omega$. Trošena moč na njej je zaradi zamika med tokom in napetostjo enaka nič.

Merjenje toka

Merilnik z vrtljivo tuljavo ne more slediti hitrim spremembam izmeničnega toka. Nadomestimo ga z instrumentom na mehko železo: v njem teče izmenični tok po tuljavi in privlači kos mehkega železa, ki je povezan s kazalcem.



Slika 25.12 Ampermeter na mehko železo. Merilna skala ni linearna. Uporaben je tako za enosmerni kot za izmenični tok. (School Historical Museum, Bremerhaven)

Uporaben je tudi merilnik na grelno žico: tok jo segreva, žica se razteza in premika kazalec. Oba merilnika kažeta efektivno jakost oziroma napetost toka. Umerimo ju z enosmernim tokom.

25.10 Energija polj

Električna

Ko z virom napetosti polnimo kondenzator, je za premik naboja iz ene plošče na drugo potrebno delo. Naj bo na kondenzatorju že naboj e in napetost U. Za premik dodatnega naboja $\mathrm{d}e$ je potem potrebno delo $A = U\mathrm{d}e = (e/C)\mathrm{d}e$. Premik celotnega naboja na končno napetost pa zahteva delo $\int (e/C)\mathrm{d}e = e^2/2C$, kar je enako $CU^2/2$. To delo opravi zunanji vir in se naloži v novozgrajeno električno polje. Električno polje v poljubnem kondenzatorju ima torej *električno energijo*

$$W = \frac{1}{2}CU^2\,. \tag{25.19}$$

Magnetna

Podobno je pri tuljavi. Naj skoznjo že teče tok I pri napetosti U. Da se tok poveča za $\mathrm{d}I$, je potrebna moč $P = IU = IL\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Zagon celotnega toka pa zahteva delo $\int P\mathrm{d}t = \int LI\mathrm{d}I = LI^2/2$. To delo opravi zunanji vir in se naloži v novozgrajeno magnetno polje. Magnetno polje poljubne tuljave ima torej *magnetno energijo*

$$W = \frac{1}{2}LI^2\,. \tag{25.20}$$

Gostota energije

Energija polja v kakršnemkoli kondenzatorju je enolično določeno z njegovo obliko in razsežnostjo ter z napetostjo med ploščama. Najpreprostejši je ploščati kondenzator. Polje v njem je homogeno, zunaj njega pa povsod enako nič. Če energija res tiči v polju, mora biti odvisna od poljske jakosti in prostornine polja.

Upoštevamo enačbi za kapaciteto in za električno poljsko jakost, delimo s prostornino in dobimo:

$$w = \frac{W}{V} \tag{25.21}$$

$$w = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2\,. \tag{25.22}$$

Količino w poimenujemo *gostota energije*. V homogenem polju ploščatega kondenzatorja je povsod enaka. Pričakujemo, da isti izraz velja tudi za nehomogeno polje. V njem je pač gostota energije od točke do točke različna.

Podobno velja za magnetno polje. Upoštevamo enačbi za induktivnost in magnetno poljsko jakost v dolgi tuljavi, pa dobimo:

$$w = \frac{1}{2\mu_0}\,B^2\,. \tag{25.23}$$

25.11 Nihajni krog

Tudi nabiti kondenzator je vir toka: če ga kratko staknemo, steče po povezavi višek naboja z ene plošče na drugo. Kaj če v povezavo vključimo tuljavo?

Nihanje toka

Takoj ko sklenemo stikalo, začne teči električni naboj z ene plošče kondenzatorja na drugo. Sprva je napetost na kondenzatorju velika, zato je tok močan, potem pa pojenjuje. V tuljavi sproti gradi magnetno polje. Ker tok pojema, se magnetni pretok v tuljavi spreminja in v navojih tuljave inducira napetost, ki spremembi toka nasprotuje. Tako tuljava zadržuje tok, dokler plošči ne postaneta nevtralni, potem pa ga vzpodbuja, dokler se ne naelektrita nasprotno kot na začetku. Nato se zgodba ponovi v nasprotni smeri. Tok niha sem in tja in z njim se gradita in razpadata električno in magnetno polje. Dobili smo *nihajni krog*.

Nihajni čas

Kakšen je nihajni čas? Napetost na kondenzatorju je nasprotno enaka napetosti na tuljavi; prvo dobimo iz enačbe za kapacitivnost in drugo iz enačbe za induktivnost: $q/C = -L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Odvajamo obe strani po času in dobimo $\mathrm{d}^2I/\mathrm{d}t^2 + (1/LC)I = 0$. To je znana enačba za harmonično nihanje [19.4], iz katere razberemo krožno frekvenco

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}\,. \tag{25.24}$$

Če je v krogu upor, kar je vedno, je nihanje dušeno. Nihanje je tako hitro, da mu kazalčni merilniki ne morejo slediti. "Čeveljski" kondenzator 1 nF in "čeveljska" tuljava 1 mH, na primer, ustvarjata nihanje s frekvenco 1 MHz!

Ko bi le uspeli nihaje toka v električnem nihajnem krogu na nek način povezati s kakšnim števnim ali prikazovalnim mehanizmom! Potem bi dobili novo, "električno" vrsto ure. Zaradi hitrega nihanja bi bila gotovo primerna za merjenje zelo kratkih časov. Kot vidimo, nam načrtov in nalog za prihodnost res ne bo kmalu zmanjkalo. □

26 Elektrotehnika

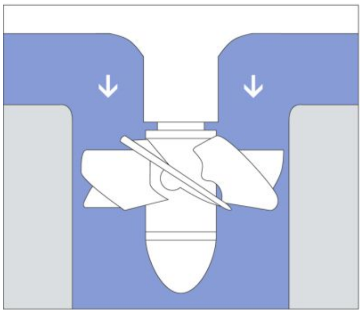
Elektrifikacija – Dinamostroji – Daljnovodi – Lokalna omrežja – Akumulatorji – Grelci in žarnice – Elektromotorji – Iskrilniki – Telegraf – Telefon

26.1 Elektrifikacija

Njen temelj

Z odkritjem indukcije napetosti se človeštvu odprejo vrata za širokopotezno proizvodnjo, prenos in uporabo električne energije. Nastopi doba elektrifikacije. V času ene generacije se življenje spremeni bolj kot v vsem dotedanjem času.

Temelj elektrifikacije predstavljajo indukcijski električni generatorji (dinamostroji), transformatorji in daljnovodi, kakor jih – v osnovni obliki – že poznamo [25.8]. Generatorje vrtijo vetrnice, vodne turbine, parne turbine in naftni batni motorji.



Slika 26.1 Vijačna vodna turbina. Skozi poševno nagnjene lopatice pada voda in jih vrti okoli navpične osi. Os turbine je hkrati os električnega generatorja. (Verband der Elektrotechnik, Frankfurt)

Osnovni prototip generatorja [25.8], kjer se vrti tuljava (*rotor*) med poloma stalnega magneta (*stator*), napetost pa se odvzema preko dveh ščetk v stiku z osjo vrtenja, izboljšamo v več smereh.

26.2 Dinamostroji

Elektromagnetni stator

V enosmernem dinamostroju so šibka točka stalni magneti v statorju, ki sčasoma slabijo. Nadomestimo jih z elektromagneti. Ti potrebujejo majhen istosmerni tok, ki ga črpamo kar s ščetk. S spreminjanjem tega magnetilnega toka (z drsnim upornikom) zlahka uravnavamo amplitudo inducirane napetosti.

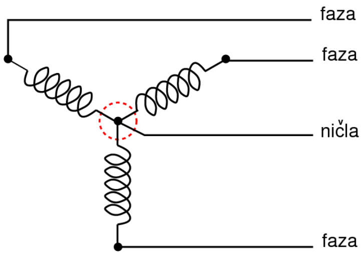
Tudi v izmeničnem dinamostroju nadomestimo stalne magnete v statorju z elektromagneti. Tok, ki ga potrebujejo, pa daje pomožni istosmerni dinamostroj na isti vrtilni osi.

Induktivni stator

Za indukcijo napetosti je pomembno le relativno gibanje vodnika in magneta. Namesto da vrtimo induktivni rotor znotraj elektromagnetnega statorja, lahko zato vrtimo elektromagnetni rotor znotraj induktivnega statorja. To pomeni, da rotorsko tuljavo napajamo preko ščetk z istosmernim tokom, napetost pa odvzemamo s statorske tuljave. Potrebni magnetilni tok spet dobimo od pomožnega istosmernega dinamostroja na isti vrtilni osi. Takšen dinamostroj je primeren za velike moči, saj izhodni tok ne teče skozi ščetke.

Trifazni izmenični tok

V stator lahko namestimo več enakih induktivnih tuljav, recimo tri, ki so med seboj razmaknjene za 120°. Elektromagnetni rotor v njih inducira tri izmenične napetosti, ki so med seboj fazno premaknjene za tretjino nihaja. Če po en konec vsake tuljave zvežemo v skupni priključek, se v njem tri napetosti v vsakem trenutku seštejejo v skupno napetost glede na zemljo. Kakšna je ta napetost? Seštejemo $\sin \omega t$, $\sin(\omega t + 120°)$ in $\sin(\omega t - 120°)$, pri čemer uporabimo izrek o sinusu vsote (15.15), in dobimo vrednost nič! Rečemo, da je to *ničelni priključek* generatorja. V preostalih treh *faznih priključkih* pa seveda vladajo izmenične napetosti. To je *trifazni dinamostroj* (TESLA). Zakaj je dober, bo razvidno v nadaljevanju.



Slika 26.2 Trifazni generator. Stator je sestavljen iz treh enakih tuljav. Po en priključek vsake tuljave je združen v skupni priključek. Napetost na njem je enaka nič.

Moči, napetosti in frekvence, ki jih nudijo generatorji, so silno raznovrstne. Največji dinamostroji so v hidro- in termoelektrarnah; so trifazni in dajejo tok s frekvenco 50 Hz. Preko priključenih transformatorjev so po vodnikih sposobni pošiljati – pri izbranih napetostih – moči preko 100 MW.

26.3 Daljnovodi

Prenosne izgube

Iz elektrarn so speljane žice, *daljnovodi*, do odvzemnih postaj, na katere so priključeni posamezni porabniki. Upor daljnovoda med elektrarno in odvzemno postajo je R. Porabniki hočejo črpati moč P. To pomeni, da bo tekel po daljnovodu tok $I = P/U$, pri čemer je U napetost na odvzemni postaji. Ta tok bo v daljnovodu trošil moč $P_{\text{loss}} = I^2 R = (P^2/U^2)R$. Pri prenosu moči P uporabnikom bodo očitno izgube tem manjše, čim višja bo napetost med prenosnima vodnikoma.

Razmišljamo lahko tudi takole. Skozi vsak mm^2 bakrenega daljnovoda teče tipično tok 1 A; bistveno močnejši tokovi preveč segrevajo vodnik. Na razdalji l vzdolž vodnika znaša padec napetosti $U = RI = \xi l I/S$, torej ~ 20 V na kilometer. Takšen padec napetosti je neodvisen od napetosti na izhodu iz generatorja. Če je ta 20 V, na primer, bo po enem kilometru padla na nič. To pomeni 100 % zmanjšanje napetosti. Pri generatorjevi napetosti 200 V je padec napetosti še vedno 20 V, a zmanjšanje je zdaj le 10 %. Očitno je, da generator z napetostjo 200 V lahko zadovoljivo napaja uporabnike le do razdalje 1 km, če ti tolerirajo do 10-odstotne spremembe gonilne napetosti.

Prenosna napetost

Napetosti na izhodu iz generatorjev ne presegajo 1000 V, ker pride sicer do iskrenja. S takšno napetostjo pa so prenosne izgube nesprejemljive že pri kratkih razdaljah nekaj kilometrov. Napetost je torej treba krepko zvišati. To je otroška igra, če je tok izmeničen, saj lahko uporabimo transformatorje, in nočna mora, če je tok enakomeren. Zaradi tega po daljnovodih pošiljamo izmenični in ne enosmerni tok. Visoka napetost pa je za uporabo smrtno nevarna, zato jo v odvzemnih postajah primerno znižamo. Pri prenosu na dolge razdalje – nekaj sto kilometrov – so uporabljene napetosti preko 100 kV. Na odvzemnih postajah pa so na voljo efektivne napetosti 220 V.

Slika 26.3 Daljnovodi. Žice so pod visoko izmenično napetostjo. Po njih se pretakajo izmenični tokovi. Daljnovodi prenašajo električno energijo od generatorjev do oddaljenih potrošnikov. (Anon)

Trifazni prenos

Za prenos izmeničnega toka sta potrebni dve daljnovodni žici. Trije tokovi bi torej potrebovali šest žic. Če pa so enakomerno fazno zamaknjeni, so potrebne le štiri žice: tri fazne in ena ničelna. Tokovi, ki iz faznih vodnikov preko porabnikov tečejo v ničelni vodnik, se – če so le enako veliki – medsebojno izničijo. Zato jih lahko vodimo nazaj po skupni žici, kar je precej ceneje. To je tudi pomemben razlog, da po daljnovodih pošiljamo trifazni in ne enofazni tok.

26.4 Lokalna omrežja

Na odvzemne postaje so priključeni končni uporabniki, recimo tovarne ali stanovanjske hiše. Do tovarn so napeljani trifazni priključki, do stanovanjskih hiš pa večinoma enofazni. Od glavnega priključka naprej je po hiši razpredeno lokalno omrežje s priključki za razne naprave – grelce za toplo vodo, na primer – in s stikali za prepuščanje toka skoznje.

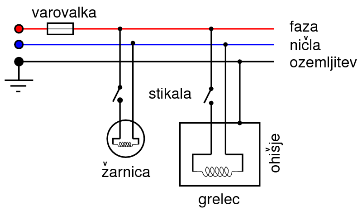
Previdnost

Napetost 220 V na fazni žici je lahko smrtno nevarna, če se je dotaknemo z roko, medtem ko stojimo na vlažnih tleh. Skozi naše telo namreč požene dovolj velik izmenični tok, da paralizira srčno mišico. Okrutni poskusi na živalih kažejo, da je dovolj že tok 0,05 A. Tudi dotik ničelne žice je lahko nevaren, ker ni zagotovo, da med njo in zemljo ni napetosti.

Ozemljitev

Da se izognemo navarnosti, moramo električne naprave povezati z zemljo, to je, *ozemljiti*. Če se v njih kakšna žica po nesreči le dotika ohišja, teče tok z njega zlahka v zemljo. Med ohišjem in zemljo tedaj ni napetosti. Ko ohišje primemo, tok ne steče skozi nas.

Standardni način ozemljitve je naslednji. Priključna vtičnica ima tri odprtine, povezane s fazno, ničelno in ozemljitveno žico. Slednja je dobro ozemljena. Priključni kabel naprave pa ima vtikač s tremi vtiči, od katerih je eden, ozemljitveni, povezan z ohišjem.



Slika 26.4 Električno omrežje v hiši. Hrbtenico tvorijo trije vodniki: fazni, ničelni in ozemljitveni. Nanje so priključeni razni porabniki. Glavna varovalka skrbi, da skupni tok ne more preveč zrasti.

Varovalke

Kadar nastane kratek stik na napeljavi, steče po žicah tako močan tok, da jih lahko celo stali in zaneti požar. To preprečuje glavna *varovalka*, nameščena tik za glavnim hišnim priključkom. Najpreprostejša varovalka je kar tanka žička. Če skozi njo steče prevelik tok, žička pregori in ga s tem prekine. Seveda imajo tudi posamezne veje omrežja svoje podvarovalke. Tipična glavna varovalka za stanovanjsko hišo prenese tok do 15 A.

26.5 Akumulatorji

Kadar generatorji ne delajo ali pa priključki do njih niso dostopni, smo v težavah. Za te primere bi bilo imenitno imeti skladišče elektrike, ki bi ga polnili v dobrih časih in praznili v hudih. Tako odkrijemo, s precej truda, *svinčeni akumulator*.

Svinčeni akumulator

Svinčeni akumulator je baterija električnih členov s po dvema svinčenima elektrodama v razredčeni žvepleni kislini, od katerih je ena prevlečena s svinčevim dioksidom. Reakcije, ki v členu potekajo pri praznjenju in polnjenju, so si nasprotne. Pri praznjenju postajata obe elektrodi enaki: vsaka ima na svinčenem jedru plast svinčevega sulfata. Žveplena kislina se močno razredči. Pri polnjenju se elektrodi in elektrolit vrnejo v začetno stanje. Podrobneje zapisano: $2PbSO_4 + 2H_2O \leftrightarrow PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4$. Koliko je akumulator nabit, se da ugotoviti kar iz koncentracije elektrolita.

Akumulator polnimo z generatorjem enosmernega toka in ga praznimo skozi vse vrste porabnikov. Posamezen člen ima napetost 2 V, njihove baterije pa, standardno, po 6, 12, 24 in 48 V. Kapaciteta baterije je odvisna od njene velikosti. Tipično znaša 5 Ah na kilogram.

26.6 Grelci in žarnice

Grelec

Toploto, ki se sprošča pri prehodu toka skozi vodnik, izkoriščamo za segrevanje. Primerna sta tako enosmerni kot izmenični tok. Z *grelci* grejemo zrak v stanovanjih in vodo v bojlerjih. Hrano kuhamo na *kuhalnikih*, štedilnikih in v pečicah. Tipičen kuhalnik, priključen na 220 V, oddaja moč 1 kW, torej po njem teče tok

4,5 A. Grelci so večinoma opremljeni z bimetalnimi termometri, ki ob previsoki temperaturi izključijo tok in ga ob prenizki spet vključijo; tako skrbijo, da je temperatura stalna. Rečemo, da so to *termostati*.

Slika 26.5 Preprost kuhalnik. Tok teče po spiralni zviti žici in jo segreva do rdečega žara. (Anon)

Žarnica

Močno segrevane žičke zažarijo. To izkoristimo za razsvetljavo. Tanko žičko iz volframa, ki ima visoko tališče, zapremo v stekleno bučko, iz katere izsesamo zrak. To je *žarnica* (EDISON). Brezzračni prostor je potreben zato, ker se sicer pri visokih temperaturah kisik spaja z volframom in žička v hipu pregori. Druga možnost je, da bučko napolnimo samo z dušikom. Z žarnicami osvetljujemo sobe in ulice. Noč spremenimo v dan. Tipična sobna žarnica, priključena na 220 V, oddaja moč 100 W, torej po njej teče tok 0,5 A. Takšna žarnica osvetljuje okolico približno tako kot 100 sveč. Njena življenjska doba znaša okrog 1000 ur. Za žarnice je dober tako enosmerni kot izmenični tok. Slednji pa mora imeti dovolj visoko frekvenco nihanja, da oko ne zazna utripanja svetlobe. Primerna izbira je 50 Hz.

Slika 26.6 Prva uporabna žarnica na žarilno nitko iz oglja, ki jo je sestavil T. Edison. (Science Museum, London)

26.7 Elektromotorji

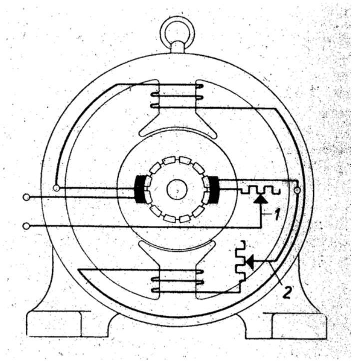
Magnetne sile tokov izkoriščamo v *elektromotorjih* za vrtenje pogonskih gredi. Elektromotor je v osnovi obratno delujoč dinamostroj. Kakor obstajajo tri glavne vrste dinamostrojev – istosmerni, izmenični in trifazni – imamo tudi tri vrste elektromotorjev.

Enosmerni motor

Enosmerni motor je povsem enak enosmernemu generatorju. Ko ga vključimo, steče skozi navoje statorja in rotorja – ki imajo nizko upornost – močan tok. Magnetna sila na rotor je zato velika in motor močno "zagrabi". Vrtenje postaja čedalje hitrejše in v navojih se inducira čedalje večja nasprotna napetost. Začetni tok se zato zmanjša in vrtenje se ustali. Tedaj je navor med obračanjem konstanten.

Pri zagonu močnih motorjev je treba paziti, da skoznje ne steče prevelik tok, ki bi ga neprijetno začutile vse okolišnje žarnice. Zato zaganjamo motor postopno preko drsnega predupora. Če v vzbujevalno statorsko navitje vključimo še en spremenljivi upor, lahko z njim določamo magnetno polje, v katerem se vrti rotor, in s tem uravnavamo hitrost vrtenja.

Enosmerni motor ima torej močan začetni navor; na povečanje obremenitve odgovarja s povečanim navorom in obratno; med obračanjem pri stalni obremenitvi je navor konstanten; in hitrost vrtenja lahko nastavljamo: rečemo lahko, da je motor odličen delavec. Njegova šibka točka je le komutator in tamkajšnje trenje ščetk ter preskoki isker.



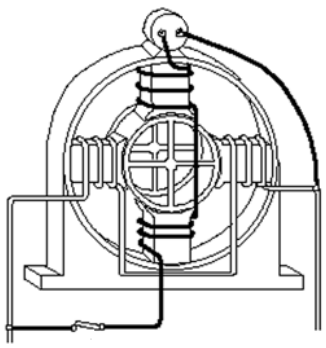
Slika 26.7 Enosmerni motor. Tok doteka preko ščetk in kolektorja v rotor, hkrati pa tudi v stator. Vrtenje uravnavata zagonski predupor (1) in magnetni regulator (2). (Vidmar, 1952)

Izmenični motor

Nazoren primer izmeničnega motorja je valjast rotor, ki ima na obodu štiri magnetne pole, in ki ga vrti izmenično magnetno polje med dvema tuljavama, po katerih teče izmenični tok. Rotor se vrti s frekvenco, ki jo določata frekvenca toka in število polov; pri štirih polih je vrtilna frekvenca enaka polovici nihajne.

Uporaba stalnih magnetov za rotor ni ravno praktična. Drzna je naslednja misel: če bi bil valjasti rotor iz bakra, bi se pri vrtenju inducirali v njem tokovi, ti pa so vedno obdani z magnetnimi plašči. Morda bi primerno oblikovan rotor na ta način postal magnetno uporaben? Razmišljanja in poskusi pokažejo, da je to res: učinkovit rotor ima obliko ptičje kletke. To je valj, katerega obroča sta povezana s palicami. Po palicah tečejo tokovi ter tako ustvarjajo robne magnetne pole. Da se inducirajo "uravnovešeni" tokovi, se mora palični rotor vrteti nekaj počasneje kot tisti s permanentnimi magneti.

Izmenični motor potrebuje tudi poseben zagon. Za to služi sekundarna statorska tuljava, postavljena pravokotno na primarno in z njo vzporedno zvezana. V sekundarni krog je vključen še kondenzator, ki povzroči, da je tok v sekundarni tuljavi fazno zamaknjen za tokom v primarni tuljavi. Tako med tuljavami nastane vrteče se magnetno polje, ki za sabo povleče rotor. Ko stroj doseže primerno število obratov, je treba zagonski krog izključiti s centrifugalnim stikalom ali z relejem.

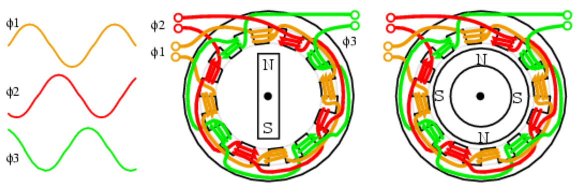


Slika 26.8 Izmenični motor z indukcijskim rotorjem. Za zagon poskrbita posebna tuljava in kondenzator (črna žica). Rotor im obliko ptičje kletke. Pri vrtenju se v njem inducirajo tokovi. Nanje deluje magnetna sila in vzdržuje vrtenje. (Anon)

Navor izmeničnega motorja se med vrtenjem spreminja, kar ni preveč ugodno. Prav tako je njegova frekvenca vrtljajev – z majhnim zmanjšanjem – priklenjena na frekvenco izmeničnega toka. Zato lahko rečemo, da je slabši delavec od enosmernega motorja. Ima pa pred njim veliko prednost: deluje na izmenični tok, ta pa je na voljo povsod, kamor le sežejo električna omrežja.

Trifazni motor

Še lepše kot med poloma dveh tuljav z izmeničnim tokom se magnetni rotor vrti med poli treh tuljav, nameščenih pod kotom 120° in napajanih s trifaznim tokom. Očitno te tuljave ustvarjajo vrteče se magnetno polje. Število statorskih tuljav lahko celo podvojimo ali še bolj pomnožimo. Če namesto magnetnega rotorja vstavimo ptičjo kletko, nastane indukcijski trifazni motor (TESLA). Njegov navor je konstanten in njegova frekvenca je – z rahlim zmanjšanjem – vezana na frekvenco toka ter število polov tuljav. Takšen motor je preprost, da bolj ne more biti, in nima nikakršnih kolektorjev. To je drugi razlog, da je trifazni tok tako praktičen.



Slika 26.9 Trifazni motor s štirimi poli za vsako fazo. Magnetno polje fazno zamaknjenih tokov se vrti in za sabo vleče magnetni rotor. Namesto slednjega je mnogo boljša ptičja kletka, v katerih se inducirajo tokovi. (AAC – All About Circuits)

Uporaba motorjev

Elektromotorje uporabljamo povsod tam, kjer bi sicer uporabljali batne naftne motorje: za pogon strojev v tovarnah, za črpalke, dvigala, lokomotive in podobno. Za pogon avtomobilov niso preveč primerni, saj morajo ti s sabo voziti velike akumulatorje. So pa nepogrešljivi za pogon podmornic, kadar te plujejo pod vodo, saj pri tem ne smejo porabljati kisika iz zraka, kakor to pač počnejo naftni motorji.

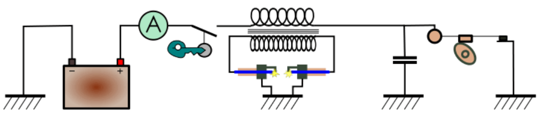
Z enosmernim elektromotorjem, priključenim na poln akumulator, poženemo tudi mirujoče naftne motorje. Ko pa motor že deluje, preko istega elektromotorja, sedaj delujočega kot dinamostoj, spet napolnimo akumulator. Tako se vedejo podmornice, ko plujejo po površini.

26.8 Iskrilniki

Plinsko olje v batnih motorjih se vžge, ko ga v pravem trenutku vbrizgamo v močno stisnjen in segret zrak. Za to je potrebna posebna tlačilna šoba. Druga možnost je, da zrak stiskamo skupaj s hitro vnetljivim gorivom, recimo alkoholom ali bencinom [11.6], in ga v pravem trenutku vžigamo z električno iskro. Namesto tlačilke je potrebna naprava za delanje isker. Očitno je to nekaj, kar elektrika pač zmore.

Električni vžig

Za iskre je potrebna visoka napetost in takšno dajejo visokonapetostni transformatorji. Na železni palici je navita primarna tuljava z malo navoji in povrh nje sekundarna tuljava z mnogo navoji. Če teče po primarni tuljavi enakomerni tok, njeno magnetno polje prežema tudi nesklenjeno sekundarno tuljavo. Ko s stikalom prekinemo primarni tok, se v primarni in sekundarni tuljavi inducirata ustrezni napetosti; slednja je dovolj velika, da požene iskro med priključkoma, če sta le dovolj skupaj. Vse skupaj imenujemo *indukcijski iskrilnik*.



Slika 26.10 Iskrilnik za bencinski motor. Akumulator poganja tok skozi primarno tuljavo z malo ovoji. Ko vrtilna gred motorja prekine tok, se v sekundarni tuljavi z mnogo ovoji inducira visoka napetost, ki povzroči preskok iskre v svečicah. (Anon)

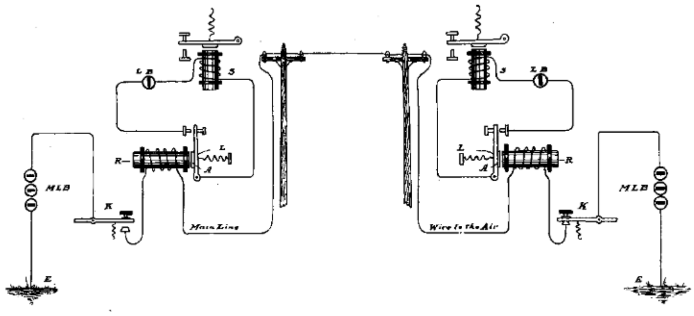
Bencinski motor

Indukcijski iskrilnik poganja in krmili kar motor sam. Enakomerni tok dobavlja z motorjevo gredjo gnan dinamostroj ali akumulator, stikalo pa prekinja poseben izrastek na gredi. Najpreprostejši je tak izrastek, ki povzroči iskro vsakokrat, ko je bat v najvišji legi. Prvič zažge gorivo, drugič pa ne naredi ničesar na že izgorelih plinih. Rečemo, da je to batni motor z električnim vžigom, da ga razlikujemo od onega, dosedanjega, s kompresijskim vžigom. Zaradi kratkosti pa bomo pa zanaprej raje govorili kar o naftnem in *bencinskem motorju* (OTTO). Ker je bencinski motor lahek in močen, je kot naročen za pogon avtomobilov in letal. Seveda s tem še bolj vzpodbudi naftno industrijo.

26.9 Telegraf

Stikalo in rele

Tuljave z železnim jedrom postanejo ali prenehajo biti magnetne "na ukaz" – z vključitvijo ali izključitvijo toka skoznje. Dvojica stikalo-elektromagnet je zato primerna za prenos sporočil, saj sta obe sestavini lahko daleč narazen. Ko človek vključi *stikalo*, oddaljeni elektromagnet, *rele*, pritegne k sebi železen vzvod, in ko ga izključi, se vzvod vrne v začetno lego zaradi priključene vzmeti. Človek pri elektromagnetu torej sprejema, kar pošilja človek pri stikalu. Hitrost prenosa se zdi hipna.



Slika 26.11 Telegraf. Pritisk na tipko sklene električni krog in premakne lokalni in oddaljeni rele. (Dodge, 1921)

Telegrafsko omrežje

Za praktično uporabo se je treba le dogovoriti, kako pošiljati črke. Takole: vsaka črka abecede naj bo predstavljena z zaporedjem kratkih in dolgih signalov, recimo A kot dvojica "kratek" in "dolg". Prvi človek to odtipka, vzvod, opremljen s pisalom, pa zabeleži na tekoči papirni trak. To je enosmerni *telegraf* (MORSE). Za dvosmerno sporočanje mora seveda vsaka *telegrafska postaja* imeti oddajnik (stikalo) in sprejemnik (elektromagnet). Postaje so med seboj povezane le z eno žico in uporabljajo namesto druge kar zemljo. Za tok skrbijo baterije. Dobre postaje pošiljajo sporočila do nekaj sto kilometrov daleč. Za večje razdalje so potrebne vmesne postaje s stikali in baterijami.

26.10 Telefon

Potovanje telegrafskih impulzov po žici je pravzaprav spremenljiv tok, katerega spremembe nosijo informacijo. Namesto da tok spreminjamo s pritiskom prsta na tipko, bi ga lahko tudi kako drugače. Morda se da na tok vplivati tudi s pritiskom zvočnih valov na kakšno primerno napravo, skozi katero teče? Potem bi po žici lahko pošiljali zakodiran govor!

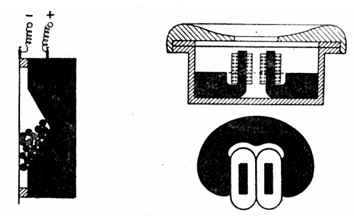
Mikrofon in slušalka

Razmišljanje in poskušanje pripeljeta do naslednje rešitve. Plitev valj iz izolatorja zapremo na vsaki strani s kovinskima opnama; ena je tanka in gibljiva, druga pa debela in toga. Med opne nasujemo drobne ogljene kroglice. Če sedaj povežemo opni s poloma baterije, bo skozi ogleno plast stekel tok. Njegova jakost bo odvisna od upora. Ko govorimo, zvočni valovi premikajo opno, ta bolj ali manj stiska kroglice med seboj, spreminja upor in oblikuje tok. To je ogleni *mikrofon*.

Na drugem koncu žic je potrebna pretvorba spremenljivega toka nazaj v zvočne valove. To opravi elektromagnet, ki verno premika primerno kovinsko opno – električna *slušalka*.

Telefonsko omrežje

Za dvostransko sporočanje mora vsak uporabnik imeti mikrofon in slušalko – *telefonski aparat* (BELL). Aparata bi bila sicer lahko povezana le z eno žico in tlemi, tako kot pri telegrafu, vendar bi se tedaj v njuni (široko razprti) zanki inducirali moteči tokovi zaradi spremenljivih magnetnih polj v okolici. Zato aparata raje povežemo z dvema zvitima žicama. Telefona začneta delovati, ko eden od uporabnikov s stikalom vključi pogonsko baterijo.



Slika 26.12 Ogleni mikrofon in elektromagnetna slušalka, glavna sestavna dela telefona. (Kuhelj, 1960)

V praksi je množica uporabnikov vezana na *telefonsko centralo*. Tam je tudi skupna baterija. Uporabnik, ki želi telefonirati, pokliče centralo, tamkajšnji uslužbenec pa ga poveže z željenim naslovnikom. Namesto človeka lahko to delo opravlja primeren preklopni avtomat.

Telefonska baterija ima standardno napetost 48 V, kar omogoča prenose do nekaj sto kilometrov. Če je razdalja daljša, so potrebne vmesne ojačevalne postaje. Tam se vhodni žični par s šibkim signalom zaključi v slušalko. Nasproti ji stoji mikrofon z izhodnim žičnim parom, priključenim na svežo baterijo. Opni slušalke in mikrofona sta mehanično povezani. Ojačanje je preprosto in učinkovito. □

27 Svetlobni valovi

Hitrost svetlobe – Posledice hitrosti – Svetlobni valovi – Svetlobni spektri – Polarizacija svetlobe – Svetlobna energija – Svetila – Toplotno sevanje – Sevalna temperatura – Svetloba in snov – Fotografija – Fotografija neba – Izsevi zvezd

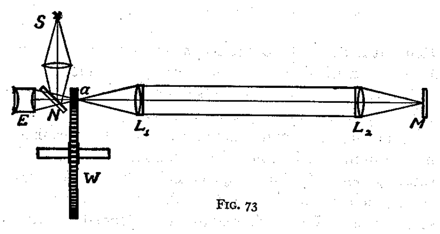
27.1 Hitrost svetlobe

Preletni čas

Širjenje svetlobe smo opisali z žarki. Kakšna pa je njena hitrost vzdolž žarkov? Kot starodavni raziskovalec z omejenimi sredstvi splezam na hrib in pripravim petrolejsko svetilko z zaslonom. Na primerno oddaljen hrib pošljem pomočnika, tudi s svetilko. Dogovoriva se, da bom jaz odprl zaslon svoje svetilke, pomočnik pa bo, takoj ko bo opazil mojo luč, odprl svoj zaslon. Jaz bom medtem z uro meril čas do takrat, ko bom zagledal njegovo luč. Hitrost svetlobe bo potem določena z dvojno razdaljo med hriboma in z izmerjenim časom. Ko poskus res opraviva, se pokaže, da zagledam pomočnikovo svetilko samo drobec sekunde po tem, ko odprem svojo. Ta drobec je vedno enak, ne glede na razdaljo med hriboma. Pripišem ga zakasnitveni reakciji pomočnika. Kaže torej, da se svetloba giblje silno hitro. Prav tako kaže, da se vse njene barvne sestavine širijo enako hitro, saj pomočnikove svetilke na zagledam – na primer – najprej rdeče, ampak je vseskozi enake barve.

Zobato kolo

Opisani poskus bo očitno treba izboljšati. Z obločno žarnico in zbiralno lečo ustvarimo svetlobni žarek in ga pošljemo skozi poševno polprepustno zrcalo proti oddaljenemu zrcalu. Na pot mu nastavimo zobato kolo, ki ga vrti urni mehanizem ali elektromotor. Pri primerni hitrosti vrtenja gre izsevani žarek skozi eno škrbino ven in odbiti žarek skozi naslednjo škrbino nazaj, nakar se odbije od poševnega polprepustnega zrcala vstran, kjer ga opazujemo z daljnogledom.



Slika 27.1 Meritev hitrosti svetlobe z zobatim kolesom. (Michelson, 1927)

Iz znane razdalje – okrog deset kilometrov – in razsežnosti ter vrtenja zobatega kolesa je hitrost svetlobe enolično določena. Dobimo (FIZEAU)

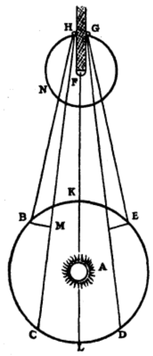
$$c = 300 \cdot 10^3\,\mathrm{km/s}\,. \qquad (27.1)$$

To je silna hitrost. Za pot okoli Zemlje potrebuje svetloba zgolj desetinko sekunde.

27.2 Posledice hitrosti

Svetlobna kasnitev

Jupitrove lune vzhajajo izza njega in zahajajo za njim v pravilnih časovnih presledkih. Obhodni časi imajo red velikosti nekaj dni. Najlažje jih merimo, ko je Jupiter v opoziciji. Časi so tako pravilni, da lahko napovemo na minuto natančno, kdaj bo kakšna luna mrknila. Ko primerjamo napovedi z dejanskim opazovanjem čez pol leta, ko je Jupiter v konjunkciji, opazimo, da mrki kasnijo za 17 minut. Opazovanje planeta blizu Sonca je sicer težavno, a izvedljivo v jutranjem in večernem mraku. Čez eno leto, spet v opoziciji, pa so mrki znova točni.



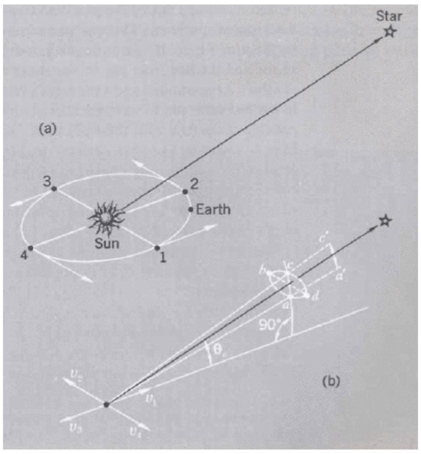
Slika 27.2 Mrki Jupitrovih lun v opoziciji kasnijo za tistimi v konjunkciji. Kasnitev je tolikšna, kolikor potrebuje svetloba za prelet Zemljine orbite. (Huygens, 1678)

Opažena kasnitev je očitno enaka času, ki ga svetloba potrebuje, da preleti premer Zemljinega tira (ROEMER). Zato lahko na novo izračunamo oddaljenost Sonca od Zemlje: dosedanjo oceno za to *astronomsko enoto* izboljšamo na $150 \cdot 10^6$ km. To znese štiristo (in ne dvajset!) razdalj Zemlja-Mesec. Iz astronomske enote, relativnih oddaljenosti in kotnih premerov pa takoj sledijo oddaljenosti in velikosti Sonca in planetov. Merjeno s preletnim časom svetlobe je Zemlja od Sonca oddaljena 8 minut in Jupiter 40 minut. Če si predstavljamo Sonce kot kroglo s premerom en meter, je Zemlja češnja s premerom en centimeter, oddaljena za stopetdeset metrov. Na razdalji enega čevlja od nje pa kroži Mesec, velik kot češnjeva koščica.

Aberacija svetlobe

Natančne meritve zenitne razdalje Severnice ob (spodnjem ali zgornjem) prehodu čez meridian kažejo, da se ta spreminja za nekaj deset kotnih sekund s periodo 1 leta. Tudi zenitne razdalje drugih zvezd se spreminjajo podobno. Največje razlike najdemo pri zvezdah, ki ležijo v normalni smeri na ekliptiko, in znašajo $\pm 20''$. Zvezde, ki ležijo v ravnini ekliptike, pa ne kažejo teh sprememb.

Najprej pomislimo, da smo odkrili tako željeno paralakso zvezd, opazovanih iz nasprotnih koncev ekliptike. Slika 27.3 (a) kaže, da bi morali maksimalno višino zvezde nad ekliptično ravnino izmeriti iz točke 2 in minimalno iz točke 4. Meritve pa pokažejo, da vidimo maksimum iz 3 in minimum iz 1. To torej ne more biti paralaksa. Kaj je potem vzrok?



Slika 27.3 Aberacija svetlobe. V koordinatnem sistemu, vezanem na Zemljo, a usmerjenim v stalno prostorsko smer, zarisuje navidezna lega zvezde elipso. Iz Zemlje pri 1, 2, 3 in 4 je zvezda vidna v a, b, c in d. (University of Colorado)

Mislimo si zvezdo natanko v smeri normale na ekliptiko. Svetloba, ki lije iz zvezde na Zemljo, je kot dež, ki pada na človeka, ki kroži po polju. Kaj ne nagne človek dežnika v smeri gibanja, da ni moker? Tako mora tudi opazovalec zvezd nagniti teleskop v smeri gibanja, oziroma – ker opazuje na meridianu – mu spreminjati zenitni kot, da vidi zvezdo vedno v okularjevem križu. Polovično razliko med maksimalnim in minimalnim zenitnim kotom imenujemo *aberacija*. Njena velikost je podana z razmerjem hitrosti Zemlje in svetlobe: $\tan\alpha \approx \alpha = v/c$. Zemlja se giblje okoli Sonca s hitrostjo $2\pi \cdot \mathrm{au}/\mathrm{leto} = 30\,\mathrm{km/s}$. Pričakovana aberacije je potem 20″, natanko v skladu z izmerki (BRADLEY).

Podobno velja za zvezde, ki jih vidimo pod kotom θ_0 nad ekliptično ravnino. Preko enega leta opiše taka zvezda elipso z maksimalno osjo $2v/c$ in minimalno osjo, ki je od nje manjša za faktor $\sin\theta_0$. Zvezdne elipse niso odvisne od oddaljenosti zvezd.

Zvezdna aberacija neposredno dokazuje, da se Zemlja res giblje. Meritve se odlično prilegajo napovedanim elipsam – bolje kot na 1″. To pomeni, da so iskane paralakse zvezd (odvisne od razdalje) manjše od 1″. Aberacija jih povsem zaduši. Ni misliti, da bi jih lahko izmerili preko sprememb zenitnih kotov. Treba jih bo meriti preko sprememb relativnih kotov med več zvezdami tesno skupaj. Aberacija namreč deluje na vse te zvezde enako in zato ne vpliva na paralakse.

27.3 Svetlobni valovi

Model svetlobe kot curka delcev ni edini. Težni valovi na gladini vode in zvočni valovi v zraku nam kažejo drugo možnost. Po njihovem zgledu zgradimo valovni model svetlobe.

Valovi

Privzemimo, da je svetloba valovanje nekega neznanega polja ϕ. Svetlobni žarek je potem ravno valovanje z valovno dolžino λ, frekvenco ν in hitrostjo $c = \lambda\nu$. Zaenkrat pustimo ob strani, ali je valovanje transverzalno ali longitudinalno. Svetlobo različnih frekvenc vidimo kot različne barve.

Interferenca

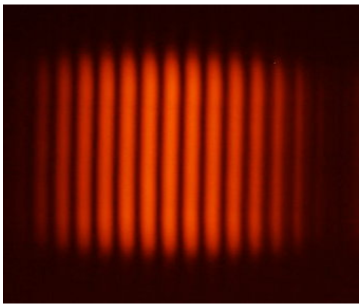
Če se dva žarka križata, gresta drug skozi drugega, pri čemer se v vsakem trenutku v vsaki točki njuna tamkajšnja vala seštejeta: $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Rečemo, da valovanji interferirata. Dva maksimuma se ojačita, dva minimuma se poglobita in maksimum ter minimum se poravnata.

Odboj in lom

Lahko z valovnim modelom razložimo opaženi odboj in lom? Seveda, tako kot pri vodnih valovih [21.5–6]. Ko valovanje vpade na oviro, se od vsake točke odbija kot krožno valovanje in ovojnica vseh teh krožnih valov tvori odbiti val. Podobno je pri lomu. Valovni model torej pravilno napove odboj in lom. Pri slednjem pove še, da mora biti hitrost svetlobe v vodi ali steklu manjša od tiste v praznem prostoru: $c' = c/n$. Tudi valovna dolžina svetlobe v vodi ali steklu se zmanjša na $\lambda' = \lambda/n$, frekvenca pa ostane nespremenjena.

Uklon

Če je svetloba res valovanje, bi se morala uklanjati. Vemo, da ravno valovanje, ki vpada pravokotno na zaslon z dvema režama na medsebojni razdalji d, prehaja skozi reži in vsaka postane izvor krožnih valov [21.7]. Ti interferirajo in se ojačijo v točkah, v katerih je dolžina poti od vsake reže enaka mnogokratniku valovne dolžine. Ojačenje nastopa v smereh θ glede na normalo zaslona: $d \sin\theta = N\lambda$, $N = 0, 1, 2 \ldots$ Poskus uspe z dvema režama, ki sta drobec milimetra narazen, in z rdečo filtrirano svetlobo: pokaže se uklonska slika (YOUNG). Svetloba je torej valovanje in ne tok delcev, kakor smo domnevali do sedaj.



Slika 27.4 Uklon svetlobe na dveh režah. Reži sta široki po 0,05 mm in sta medsebojno razmaknjeni za 0,25 mm. Osvetljuje ju svetilka z natrijevo paro. Na zaslonu, oddaljenem pol metra, znaša razmik med dvema maksimumoma okrog 1 mm. (Kuiper, P.)

Bolj natančne meritve naredimo z *mrežico*, ki ima okrog 500 rež na milimeter. Mrežico moramo narediti s posebno napravo, ki z diamantno konico reže črte v steklo. Če je rež več, se namreč navedene smeri maksimumov ne spremenijo, sami pa postanejo ostrejši in svetlejši. Z merjenjem razdalje med dvema maksimumoma na zaslonu izračunamo valovno dolžino rdeče in vijolične svetlobe: 0,8 μm in 0,4 μm. Vzdolž milimetra se tako zvrsti preko tisoč svetlobnih valov. V praksi uporabljamo raje odbojno mrežico, ne prepustne, in poševni vpad svetlobe; tedaj je spekter svetlejši in bolj raztegnjen.

Ker poleg valovne dolžine poznamo še hitrost svetlobnih valov, znamo tudi izračunati njihovo frekvenco. Dobimo strahotno vrednost $\sim 10^{14}$ nihajev v sekundi. Pa ne bi smelo biti tako čudno:

skozi izbrani presek žarka potujejo namreč izredno kratki valovi z izredno veliko hitrostjo.

Ločljivost

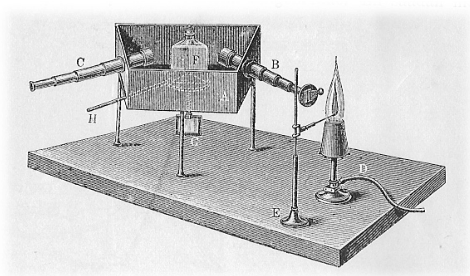
Objektiv daljnogleda je tudi "reža", namreč okrogla, in na njej se svetloba seveda uklanja. Zato se slika točkastega predmeta, recimo zvezde, razmaže v svetlo pego. Če sta dve zvezdi dovolj blizu, se njuni pegi prekrijeta in ju vidimo kot eno. Kotna ločljivost daljnogleda je torej omejena. Večji kot je objektiv, manj razmazana je slika. Daljnogled s premerom objektiva $\sim 10\,\mathrm{cm}$ razločuje še kote $1''$, kakor ugotovimo z opazovanjem dveh osvetljenih rež na primerni oddaljenosti. Večji daljnogledi bi sicer morali gledati še ostreje, vendar jim to preprečuje migotanje zraka.

Podobno je z mikroskopom. Čim manjše predmete opazujemo, tem bolj so razmazani. Svetloba se pač uklanja – na njih in na objektivu. Predmeti, ki so primerljivi z valovno dolžino svetlobe ali celo manjši od nje, so zato nerazločljivi. Atomov, ki so, kot vemo, 10^4-krat manjši od svetlobnih valov, nikoli ne bomo mogli neposredno videti.

27.4 Svetlobni spektri

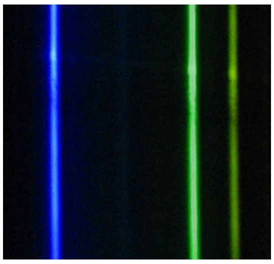
Spektroskop

Plamen plinskega gorilnika je skoraj brezbarven. Ko pa vanj na platinasti žici potisnemo zrno morske soli, se obarva živo rumeno. Sestavo svetlobe raziščemo tako, da jo z lečo, pred katero je vodoravna reža, oblikujemo v trakast snop, tega usmerimo na stekleno prizmo in z druge strani opazujemo z daljnogledom. To je *spektroskop*.



Slika 27.5 Spektroskop na prizmo. Vpadajoča svetloba se razkloni v spekter. (Kirchoff, 1896)

S spektroskopom ugotovimo, da oddaja morska sol, ko se v plamenu uplini, svetlobo, sestavljeno samo iz nekaterih valovnih dolžin. Njen spekter torej ni zvezen, kakor pri sončni svetlobi, ampak je sestavljen iz posamičnih barvnih črt. Najsvetlejši sta dve rumeni črti, ki ležita tesno druga ob drugi, in dajeta plamenu značilno barvo. Tudi druge snovi se vedejo podobno: v vročem plinastem stanju oddajajo svetlobo, ki ima za snov značilne valovne dolžine. Rečemo, da so to njihovi črtni spektri. Rumeni dvojček, na primer, je prstni odtis natrijevih atomov.



Slika 27.6 Spekter živosrebrnih par. Ustvarja ga lom skozi prizmo. (Pisgah Astronomical Research Institute)

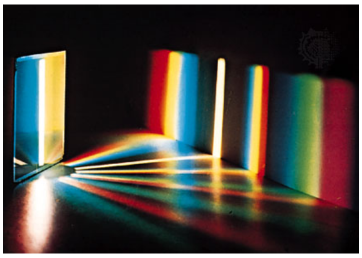
Spektrometer

Spektroskop na prizmo sicer razlomi natrijevo svetlobo na posamezne črte, vendar za njih ne vemo, kakšno valovno dolžino imajo. Porodi se misel, da bi svetlobo razcepili po valovnih dolžinah z uklonsko mrežico. Tedaj se bo vsaka enobarvna komponenta razcepila v svoj niz maksimumov; z odklonskim kotom izbranega maksimuma pa je določena njegova valovna dolžina. Tako izumimo *spektrometer* (FRAUNHOFER). Z njim ugotovimo, da imata natrijevi rumeni črti valovni dolžini 590,0 in 590,6 nm.

Spektrometer uporabimo kot naparavo, s katero določamo vrsto atomov v spojinah. Več osvetljenih rež je na mrežici, bolj ozki so maksimumi in bolj tesno skupaj ležeče črte lahko razločujemo. Mrežica dolžine 10 mm in s 500 režami na milimeter razcepi še dve črti, ki sta 0,1 nm (velikost atoma) narazen.

Sončne črte

Ko spustimo skozi spektrometersko mrežico sončno svetlobo, se ta razkloni v zaporedje zveznih mavričnih spektrov, ki se delno prekrivajo. Vsaka barvna komponenta, recimo rdeča, se namreč razcepi v zaporedje svojih maksimumov. Prav tako seveda vse ostale. Posamničen uklonski spekter je nadvse podoben tistemu, ki ga tvori steklena prizma.



Slika 27.7 Večkratni spektri sončne svetlobe za uklonsko mrežico. (Encyclopedia Britannica)

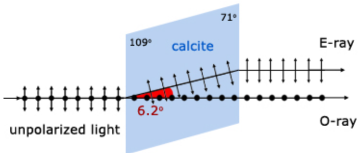
Če dobro pogledamo, opazimo v sončnem spektru množico tankih črnih črt. Dve črni črti sta prav pri tisti valovni dolžini, kakor rumeni črti natrija. To si razlagamo tako, da Sonce iz svoje vroče in goste notranjosti seva zvezen spekter svetlobe, v hladnejšem plinastem "ozračju" pa so prisotne natrijeve pare. Te pare absorbirajo svetlobo "svojih" valovnih dolžin in jo nato tudi izsevajo na vse strani. Tako ta svetloba umanjka iz žarkov, ki vstopajo v spektrometer. Seveda velja povedano tudi za druge črte in druge atome. Spektrometer nam torej daje v roke moč, da ugotovimo, kakšne snovi vse so na Soncu in zvezdah. Pokaže se, da prav take, kot so na Zemlji.

27.5 Polarizacija svetlobe

Dvolomni kristali

Ko položimo čist kristal kvarca ($CaCO_3$) na popisan list papirja, vidimo črke dvojno. Kaže, da se vsak žarek iz poljubne točke papirja pri prehodu skozi kristal razcepi v dva vzporedna žarka (BARTHOLIN).

Razcep žarka podrobneje raziščemo takole. Ozek curek svetlobe spustimo pravokotno na eno stranico kristala. Za kristalom se na zaslonu narišeta dve pegi. Ena pega leži na podaljšku vpadajočega curka in torej ne doživlja nobenega loma (kakor je "prav"). To je *redni žarek*. Druga pega pa kaže *izredni žarek*, ki se – kljub pravokotnemu vpadu – lomi na prednji ploskvi kristala ter ga zapušča vzporedno premaknjen. Za ta žarek torej ne velja lomni zakon. Če kristal vrtimo okrog osi, ki jo določa vpadajoči žarek, ostaja redna pega pri miru, izredna pega pa se vrti okrog nje.



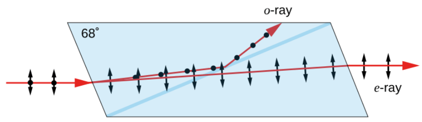
Slika 27.8 Dvolomnost na kristalu kalcita. Prikazana sta redni (O) in izredni (E) žarek. (A-level Physics Tutor)

Izhodna curka se očitno v nečem razlikujeta. Privlačna je misel, da je svetloba morda transverzalno valovanje in da se izhodna curka razlikujeta po polarizaciji: vsak je polariziran v svoji smeri in ti dve smeri sta med seboj pravokotni. Vhodni curek pa vsebuje mešanico polarizacij v vseh smereh.

Kako bi domnevo preizkusili? Redni curek spustimo skozi motno vodo in si ga ogledamo iz vseh smeri. Morda je iz različnih smeri različen? Gledajoč pravokotno na curek premikamo oko okrog njegove osi. Iz dveh mest, ki sta narazen za 180°, curek izgine. Oko leži takrat v nihajni ravnini svetlobe. Na kristalu jo označimo s primernim kazalcem. Polariziranost pokaže tudi izredni curek, medtem ko je vhodni curek videti nepolariziran. Kaže, da je naša domneva upravičena.

Dvolomni polarizator

Za nadaljnje eksperimentiranje potrebujemo dober *polarizator*. Enega že poznamo: to je kvarčni kristal z izhodnim zaslonom, ki prepušča le redni curek, izrednega pa blokira (ali obratno). Žal pa je na tak način možno ustvariti le polarizirane curke z nekaj milimetri premera. Nepotrebni curek moramo zato odstraniti kako drugače, ne z zaslonom. Pojavi se zamisel, da ga popolno odbijemo na diagonalni ravnini kristala, ki ga moramo v ta namen prežagati in špranjo zamašiti s primernim lepilom, ki ima lomni količnik za redni žarek manjši od kristala. Tako naredimo *prizemski polarizator*, ki prepušča širok izredni curek (NICOL).



Slika 27.9 Dvolomni polarizator. Sestavljen je iz dveh zlepljenih prizem kalcita. Na lepilu se redni žarek popolnoma odbije. (Anon)

Ko spustimo curek sončne svetlobe skozi polarizator, nastane za njim curek polarizirane svetlobe. Ta curek spustimo na drug polarizator; recimo mu *analizator*. Slednjega sučemo in za njim nastaja tudi polarizirana svetloba. Če je analizator usmerjen tako kot polarizator, prepušča vso svetlobo. Če je pravokoten nanj, je ne prepušča nič. Če pa je poševen, prepušča le del svetlobe. Kako si to razlagamo? Na analizator vpadajoča polarizirana svetloba je harmonično valovanje z amplitudo A. Ta je sestavljena iz ene komponente v prepustni smeri, $A_{\parallel} = A\cos\theta$, in ene v neprepustni smeri $A_{\perp} = A\sin\theta$. Prva se prepusti, druga zaustavi. V harmoničnih valovanjih je energijski tok sorazmeren s kvadratom amplitude (21.19), zato je prepuščeni tok $j = j_0(\cos\theta)^2$. To je *polarizacijski zakon* (MALUS) Svetlobnega toka zaenkrat še ne znamo meriti.

Polarizacija pri odboju

Človeško oko ne loči med polarizirano in nepolarizirano svetlobo. Lahko pa svet opazujemo s polarizatorjem pred očmi in raziskujemo, kakšna je svetloba, ki od kod prihaja. Če je svetlost vidnega polja vedno enaka, ko polarizator vrtimo, je svetloba nepolarizirana. Če pri kakem zasuku postane vidno polje črno, je svetloba popolnoma polarizirana. Če pa vidno polje sicer potemni, a ne povsem, je svetloba delno polarizirana.

Ugotovimo naslednje. — Ko gledamo Sonce (pravokotno skozi zatemnjeno šipo), ne zaznamo nobene polarizacije. — Odsev Sonca, ki se odbija od vode ali stekla, je delno polariziran v ravnini odbojne ploskve. Stopnja polarizacije je odvisna od kota, pod katerim opazujemo ploskev. Obstaja kot θ_{p}, pri katerem je polarizacija skoraj popolna: za vodo 53° in za steklo 56°. Risba in lomni zakon (12.3) pokažeta, da je v tem primeru kot med odbitim in lomljenim žarkom 90° in da velja $\tan\theta_{\mathrm{p}} = n$. To je *polarizacijski kot* (BREWSTER). Ker je lomni količnik prozornih teles odvisen od valovne dolžine, bele svetlobe pri odboju od njih ni mogoče popolnoma polarizirati. — Svetloba, ki se odbija od kovin, recimo od srebra, ni znatno polarizirana, le okrog enega kota je polarizacija nekaj večja. Za srebro je ta kot okrog 70°. — Svetloba jasnega neba je ponekod nepolarizirana in drugod delno polarizirana. Največja polarizacija leži v smereh, ki so pravokotne na smer proti Soncu. Ko je Sonce v zenitu, je to vzdolž obzorja. Ko zahaja, pa vzdolž nebesnega poldnevnika. V oblačnem vremenu polarizacije ne zaznamo. Zgodbe, da so svoj čas severni morjeplovci navigirali z dvolomnimi kristali, zato verjetno ne držijo.

Slika 27.10 Odboj svetlobe na vodni gladini, kakor ga vidimo brez polarizatorja (desno) in z njim (levo). (Brent Mail Photography)

Sukanje polarizacije

Ali se polarizacijska ravnina kaj spreminja, ko potuje svetloba po snovi? Spustimo curek polarizirane svetlobe skozi plast tekočine in opazujmo, z analizatorjem, polarizacijo izhodnega curka. Pri vodi ne zaznamo nobene spremembe. Pri raztopini sladkorja pa odkrijemo, da je ravnina zasukana. Zasučni kot je sorazmeren z debelino plasti in s koncentracijo raztopine. Raztopina glukoze (grozdnega sladkorja) v masnem razmerju 1:100 zasuka polarizacijo za 50°/dm v desno, fruktoza (sadni sladkor) pa za 90°/dm v levo.

27.6 Svetlobna energija

Vodni kalorimeter

Vemo že, da sončna svetloba segreva telesa. Vodni kalorimeter s počrnjenim pokrovom ploščine S postavimo v snop žarkov, ki lijejo v temno sobo skozi stensko okno. Vodoravni pokrov vpija svetlobo, ki pada poševno nanj pod kotom α, in pokaže porast temperature. Proglasimo, da je sprememba notranje energije enaka dovedeni "množini svetlobe" Q. Svetlobo torej merimo, prav kakor toploto, v energijskih enotah, recimo z jouli. Z njo so definirani tudi *svetlobni tok*, *gostota (svetlobnega) toka* in *osvetljenost* pokrova:

$$P = \frac{Q}{t} \qquad (27.2)$$
$$j = \frac{P}{S_\perp}$$
$$j' = j \cos\alpha\,.$$

Če postavimo kalorimeter ven, na prosto, mu pokrov osvetljuje svetloba iz vseh strani, najmočneje seveda od Sonca. V Ljubljani izmerimo v jasnih poletnih dneh opoldanske gostote sevanja okrog 1,0 kW/m^2. Ob drugih dneh pa so izmerki manjši.

Bolometer

Pri kalorimetričnem merjenju moti oddajanje toplote v okolico. Pomagamo si tako, da kalorimeter najprej s svetlobo segrejemo do ustaljene temperature, ko sta dotok in odtok energije enaka, nakar ga – brez svetlobe – segrevamo od znotraj z električnim grelcem in naraščajočim tokom do iste temperature. S tokom dovajana moč UI je tedaj enaka svetlobno dovajani Q/t. Seveda je smiselno kalorimeter umeriti vnaprej. Prav tako ni treba, da je vodni; raje ga nadomestimo s kovinsko črno kroglico z vgrajenim električnim grelcem, nataknjeno na bučko živosrebrnega termometra. To je *bolometer*.

Termoupor

Tudi živosrebrni termometer v bolometru ni nujen: nadomestimo ga lahko z drugačnim. Izkoristimo dejstvo, da električni upor kovin narašča s temperaturo. Najboljša je platina, ki je obstojna in se ji upor močno spreminja. Skozi upornik iz platine pošiljamo električni tok in z voltmetrom merimo padec napetosti na njem, vse to pri različnih temperaturah, ki jih merimo z živosrebrnim ali plinskim termometrom. Tako upornik umerimo. Pokaže se, da je njegova upornost kar sorazmerna temperaturi. Meriti je možno med $-200\,°C$ in $500\,°C$. *Termoupor* seveda lahko segrevamo s svetlobo: samo počrniti ga moramo. Če ga umerimo z že izmerjenimi svetlobnimi tokovi, lahko skalo voltmetra zapišemo kar v enotah svetlobnega toka.

Fotoupor

Električni upor nekaterih snovi, recimo kadmijevega sulfida CdS, se močno zniža pri obsevanju s svetlobo. Rečemo, da je to *fotoupor*. Predstavljamo si, da v njem svetloba odcepljа elektrone od atomov in jih naredi prosto gibljive. Več je svetlobe, več je razpoložljivih elektronov za gibanje. Tok, ki teče skozi prevodnik in ga meri priključeni ampermeter, narašča z jakostjo obsevanja. Žal se ne absorbira vsa svetloba, ampak nekatere frekvence bolj kot druge. Kadmijev sulfid, na primer, je občutljiv predvsem na vidno svetlobo. Umerimo ga z bolometrom in s tisto vrsto svetlobe, največkrat sončno, ki nas zanima.

S primernim svetlomerom na balonu, napolnjenim s helijem, izmerimo na vrhu ozračja gostoto toka $1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$. Ta vrednost je praktično nespremenljiva in jo poimenujemo *solarna konstanta*. Talne meritve so manjše. Pri prehodu skozi ozračje se torej svetloba porazgublja.

27.7 Svetila

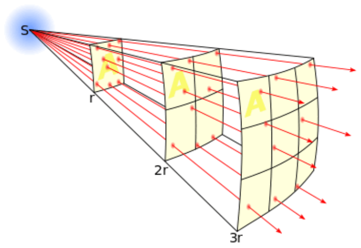
Izotropno sevanje

Nespremenljivost solarne konstante pomeni, da seva Sonce v vse smeri – kjer je trenutno pač Zemlja – enako močno. Smiselno je to privzeti tudi za smeri, kamor Zemlja ne zaide: pri dani oddaljenosti r od Sonca so gostote toka j povsod enake. Rečemo, da je sevanje *izotropno*. Tako sevajo tudi mnoga druga točkasta svetila, recimo sveče in žarnice.

Skozi vsako koncentrično krogelno ploskev okrog Sonca, začenši z njegovo površino, se pretaka enaka moč, ker se – predpostavljamo – nič energije po poti ne izgublja ali dodaja. Zato pojema gostota toka z oddaljenostjo vzdolž vsake smeri od Sonca takole:

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}\,. \tag{27.3}$$

Ker poznamo oddaljenost do Sonca, lahko iz solarne konstante izračunamo njegov celoten izsev: $4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$.



Slika 27.11 Gostota svetlobnega toka pojema z oddaljenostjo. (Anon)

Anizotropno sevanje

Nekatera točkasta svetila, na primer žaromet (žarnica v gorišču vboklega zrcala), ne sevajo izotropno. Žaromet seva večino svetlobe v ozek prostorski kot v izbrano smer. Takšno sevanje opišemo s porazdelitvijo moči na enoto prostorskega kota $d\Omega = dS/r^2$ po smereh prostora, to je s *svetilnostjo*

$$I = \frac{dP}{d\Omega} \tag{27.4}$$

$$j = \frac{I}{r^2} \,.$$

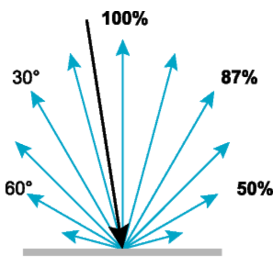
Za izotropno sevanje seveda velja $I = P/4\pi$.

Razsežna svetila

Tudi hrapav zid, ki odbija sončno svetlobo, je svetilo: vsaka njegova ploskvica seva v vse smeri. Rečemo, da je to *razsežno svetilo*. Njegovo sevanje opišemo tako, da za vsako točko povemo, kakšna je tamkajšnja svetilnost v vsako smer, preračunana na pravokotno ploskovno enoto:

$$B = \frac{dI}{dS_\perp} \,. \tag{27.5}$$

Ploščica na zidu, ki jo gledamo, je tem bolj svetla, čim večja je njena svetilnost (v smeri proti našemu očesu) na ploskovno enoto. Zato temu količniku tudi rečemo *svetlost*. Nasploh je svetlost izbrane ploščice odvisna od smeri, pod katero jo gledamo. Pri hrapavem zidu pa se zdi, da je enako svetel pod vsemi (neprevelikimi) koti α glede na njegovo pravokotnico. To pomeni, da mora svetilnost zidu upadati s tem kotom ravno tako, kakor se manjša projekcija ploščice, torej $I = I_0 \cos\alpha$ (Lambert).



Slika 27.12 Hrapave ploskve odbijajo svetlobo v vse smeri. Svetilnost v izbrani smeri je sorazmerna s kosinusom kota od normale. Zato je ploščica iz vseh smeri videti enako svetla. (Ryer, 2000)

Dobro je tudi vedeti, kakšen svetlobni tok oddaja površinska enota v vse smeri polprostora. To pove kvocient

$$j^* = \frac{P}{S} \,. \tag{27.6}$$

Rečemo mu *gostota izseva*. Seštevanje po vseh smereh polprostora zapišemo kot $j^* = \int I \,\mathrm{d}\Omega / S$ oziroma $\int BS \cos\theta \,\mathrm{d}\Omega / S$. Če je svetlost neodvisna od smeri, se izraz poenostavi v $B \int \cos\theta \,\mathrm{d}\Omega$. Nadalje velja $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}S_{\text{polkrogle}} / r^2$, torej $(r\,\mathrm{d}\theta)(2\pi r \sin\theta) / r^2$ oziroma $2\pi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$. Ko vse skupaj sestavimo, preostane le izračun integrala $\int \sin\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta$. Preoblikujemo ga v prijaznejšo obliko $\int \sin\theta \,\mathrm{d}(\sin\theta)$, izračunamo v mejah med 0 in π/2 ter na koncu dobimo $j^* = \pi B$.

27.8 Toplotno sevanje

Ko segrevamo kos železa, začne žareti: najprej rdeče, potem rumeno in na koncu belo. Sklepamo, da vsa topla telesa sevajo svetlobo, vendar vidimo samo tisto od vročih teles. Pri temperaturah, ki so dosegljive merjenju, to toplotno sevanje raziščemo. Kot izvor uporabimo odprtino peči iz platine, ki jo od znotraj segrevamo z električnim tokom. Svetloba, ki od zunaj vpada na odprtino, se v notranjosti peči vpija. Rečemo, da je odprtina *črno telo*: ne odbija nič svetlobe.

Nevidna svetloba

Svetlobo, ki zapušča odprtino, ločimo s spektrometrom po valovnih dolžinah in jih otipamo s termouporom. Pri tem ugotovimo, da se vidni spekter nadaljuje na obeh straneh. Tam je torej svetloba, ki je ne vidimo. Tisti z daljšo valovno dolžino od vidne svetlobe rečemo *infrardeča*, oni s krajšo pa *ultravijolična*.

Sevalni zakoni

Nadalje odkrijemo – s primerjavo izmerkov –, da ploščinska enota sevalca seva v vse strani v polprostor svetlobni tok, ki je sorazmeren s četrto potenco temperature (STEFAN):

$$j^* = \sigma T^4 \qquad (27.7)$$
$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}\,.$$

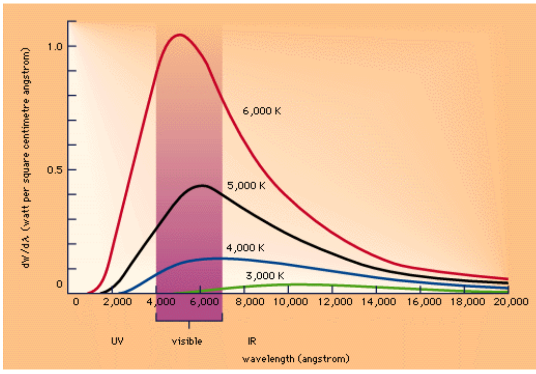
Iz meritev tudi izluščimo, da ima sevalni spekter maksimum, katerega valovna dolžina je obratno sorazmerna s temperaturo (WIEN):

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \qquad (27.8)$$
$$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Km}\,.$$

In končno: z navdahnjenim ugibanjem ter preverjanjem z izmerki najdemo še funkcijo, ki opisuje, kako je izsevani svetlobni tok porazdeljen po posameznih valovnih dolžinah oziroma nihajnih frekvencah (PLANCK):

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{c_1/\lambda^5}{\exp(c_2/\lambda T) - 1} \qquad (27.9)$$
$$c_1 = 3{,}74 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{Wm^2}$$
$$c_2 = 1{,}44 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Km}\,.$$

Prvi in drugi sevalni zakon sta vsebovana v tretjem in ju iz njega – z nekaj računanja – lahko izpeljemo. To tudi pomeni, da sta *sevalna konstanta σ* in *barvna konstanta b* v celoti odvisni od *spektralnih konstant* c_1 in c_2. Od česa pa sta odvisni slednji dve, ostaja do nadaljnjega velika skrivnost.



Slika 27.13 Sevalni spekter črnega telesa. Prikazane so izračunane vrednosti pri različnih temperaturah. (Encyclopedia Britannica)

Bitja in svetloba

Kakor težnost in toplota, tako ima tudi svetloba močan vpliv na zgradbo bitij. Rastline potrebujejo svetlobno energijo za tvorjenje hranilnih snovi, zato imajo prestrezne liste in rastejo čim više. Živali imajo oči, da iščejo hrano in se izogibajo sovražnikom. Njihove oči so najbolj občutljive za tiste valovne dolžine, kjer Sonce najbolj seva. Jabolka so rdeča in ljudje vidimo barvno zato, da jih lažje najdemo ter raztrosimo njihova semena. Podobno velja za živobarvno cvetje in za žuželke, ki ga obiskujejo in oprašujejo. Premočna ultravijolična svetloba škoduje celicam v goli človeški koži, zato se ta ščiti s tvorbo barvila: ob ekvatorju, kjer je sevanje močno, so ljudje temni. Svetloba v človeški koži tudi tvori posebno snov, "sončni vitamin", ki uravnava presnovo. V visokih zemljepisnih širinah, kjer je svetloba šibka, je temno barvilo preveč restriktivno in koža je zato svetla.

27.9 Sevalna temperatura

Sevalni termometer

Lastnosti svetlobnega toka, ki ga seva telo, izkoristimo za merjenje njegove temperature. Sevanje razsežnih teles prestrežemo z lečo in ga zgostimo na bolometer ali termoupor. Obe tipali zaznata moči vse do spodnje meje 10^{-6} W. Umerimo ju s sevanjem peči pri znani temperaturi in sicer tako, da je vidno polje leče povsem zapolnjeno s sevalno odprtino. To je *sevalni termometer*.

Visoke temperature

Sevalni termometer ne omogoča le merjenja temperature brez dotika, temveč tudi merjenje poljubno visokih temperatur, kamor niti plinski termometer ne seže več, ker se prej stali. Pravzaprav s sevalnimi zakoni in termometri šele definiramo zgornji del temperaturne skale.

Temperatura Sonca

Sončev spekter otipamo s fotouporom in v njem najdemo maksimum pri 0,55 µm, kar ustreza temperaturi Sonca 6000 K.

Sonce seva večino energije v vidnem delu spektra. Povprečno temperaturo Zemeljskega površja ocenimo na 300 K, to je na 1/20-tino Sončeve temperature, zato je maksimum Zemljinega sevanja pri infrardečih $20 \cdot 0{,}55\,\mu\text{m} = 11\,\mu\text{m}$.

Temperatura zvezd

Tudi v zvezdnih spektrih iščemo maksimume in iz njih določamo temperature. Pri tem opazujemo posamezne zvezde rahlo izven goriščne ravnine, da so razmazane v packe, in jih omejimo še s primerno zaslonko. Naletimo pa na dve težavi. Prvič, ozračje ne prepušča svetlobe vseh valovnih dolžin. V vidnem delu spektra ima sicer prepustno okno, vendar ležijo nekateri maksimumi (temperature) izven njega. Drugič, maksimumi so precej "široki" in jih je težko določiti. Obojemu odpomoremo, če merimo pri vseh valovnih dolžinah in iščemo najbolje prilegajočo se sevalno krivuljo. Tako ugotovimo zvezdne temperature med 3000 K (rdeče) in 30 000 K (modre).

27.10 Svetloba in snov

Odbojnost

Svetlobni curek se pri vpadu na površino telesa deloma odbije in deloma ponikne vanj. Odbiti tok je sorazmeren s prvotnim tokom:

$$j^* = a\,j' \,. \tag{27.10}$$

Sorazmernostni koeficient a poimenujemo *odbojnost* telesa. Odvisna je od vrste snovi, pa tudi od valovne dolžine svetlobe in nekoliko od vpadnega kota. Določamo jo s poskusom. Saje in oglje odbijata le 4 % svetlobe, sneg pa kar 90 %.

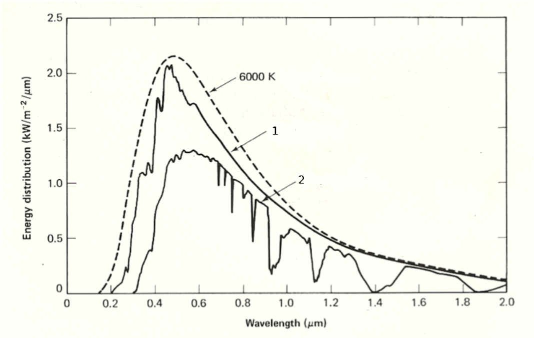
Absorpcija

Svetlobni curek, ki ponika v snov, pri tem slabi. Snov bodisi vpija svetlobo ali jo sipa v druge smeri. Predstavljamo si, da svetloba kot valovanje vzbuja atome v nihanje, ti pa nato dobljeno energijo oddajo v okolico spet s sevanjem ali pa s trki. Meritev pokaže, da gostota prepuščenega toka pojema eksponentno z razdaljo

$$j = j_0\,\mathrm{e}^{-\mu l} \,. \tag{27.11}$$

Oslabitveni koeficient μ je odvisen od snovi in valovne dolžine svetlobe. Pove, da pri razdalji $1/\mu$ pade gostota toka na vrednost $1/\mathrm{e} = 37\,\%$. Bolj nazorno je vpeljati *razpolovno debelino*, pri kateri se gostota toka zmanjša na polovico: $j_0/2 = j_0 \exp(-\mu l_{1/2})$. Sledi povezava $l_{1/2} = \mu \ln 2$.

Zemeljsko ozračje dobro prepušča vidno svetlobo, močno pa vpija ultravijolično in infrardeče sevanje. Od vse Sončeve energije, ki vpade na jasno ozračje brez oblakov, jo tla doseže okrog 80 %. Slabitev v morju je še mnogo hujša. Do globine 100 m se zgubi 99 % svetlobe. Pod to mejo vlada večna tema.



Slika 27.14 Prepustnost ozračja. Izmerjena gostota sončnega sevanja na vrhu ozračja (1) in na zemeljski površini, ko je Sonce $\sim 45°$ nad obzorjem (2). (Green, 1982)

27.11 Fotografija

Slikovna kamera

Zbiralna leča preslika predmet, recimo gorečo svečo, v njegovo sliko, ki jo ujamemo na zaslon. Če lečo in zaslon obdamo s škatlo, da ne moti stranska svetloba, in je zaslon prosojen (recimo iz motnega stekla), dobimo *slikovno kamero*. Na njeni zadnji steni se izrisujejo predmeti, ki jih gleda leča. Izostrimo jih s premikanjem leče naprej ali nazaj. Slika je obrnjena narobe. Lahko jo občrtamo s svinčnikom in tako ohranimo njeno verno podobo.

Fotografska plošča

Kaj ne bi bilo čudovito, če bi se podoba, ki jo izrisuje kamera, nekako vtisnila v zaslon in tam ostala? Takšna želja nas vodi k iskanju snovi, na kateri bi svetloba pustila vidno in trajno sled. Po številnih prizadevanjih najdemo rešitev (DAGUERRE). Zelo drobna zrnca srebrovega bromida AgBr ali klorida AgCl zamešamo v želatino in jo kot tanko plast nanesemo na stekleno ploščo. To je svetlobno občutljiva *fotografska plošča*. Recimo, da nanjo za kratek čas posije svetlobna lisa. V vsakem osvetljenem zrnu nastane grudica iz atomov srebra. Močnejša ko je svetloba, večja grudica nastane. Po osvetlitvi ploščo najprej potopimo v posebno tekočino, *razvijalec*. Ta razširi vsako grudico srebra preko celega zrna. Nato damo ploščo v *fiksir*, ki odstrani vsa neosvetljena zrna. Na stekleni plošči ostane v želatini s srebrovimi zrnci narisana lisa. To je negativ: svetli deli so narisani temno in obratno. Iz njega naredimo pozitiv na očiten način: osvetlimo in projiciramo ga na *fotografski papir* in tega razvijemo ter fiksiramo.

Fotografska kamera

Fotografsko ploščo osvetljujemo v slikovni kameri. Vstavljamo jo na mesto zaslona. Tulec, v katerem je leča, opremimo z zaklopko, ki se ob pritisku na sprožilec za kratek čas odpre in nato zapre. Čas je možno izbirati. V tulec namestimo še zaslonko nastavljive velikosti, s katero omejujemo premočan svetlobni tok. Ob pravi izbiri zaslonke in časa osvetlitve se na fotografski plošči naredi pravilno osvetljen negativ. Za sončno pokrajino znaša tipični čas kakšno stotinko sekunde. Pri določevanju pravilne osvetlitve si pomagamo tako, da svetlobo izmerimo s fotouporom.

Slika 27.15 Fotografska kamera – naprava za slikanje predmetov. Prikazana je ena od prvih kamer, ki je uvedla pomični fotografski trak. Opremljena je s kukalom in obročki za nastavitev zaslonke, časa in oddaljenosti. (Anon)

Eden izmed predmetov, ki jih slikamo, je na papirju narisana mreža vzporednih črt. Če je mreža daleč, je njena slika na negativu majhna in dobimo dobro uklonsko mrežico.

Fotografska kamera ni nič drugega kot umetno zgrajeno človeško oko. Kamorkoli postavimo oko, lahko postavimo tudi kamero: za mikroskop, daljnogled ali spektroskop. Pri daljnogledu je prav tudi, če uporabimo kar samo ploščo, ki jo postavimo v gorišče objektiva, in tako slikamo zvezde. Ker je objektiv večji od zenice očesa, zbere daljnogled tudi več svetlobe. In čas osvetlitve je možno nastaviti celo na nekaj ur. Seveda moramo pri tem zvezdo slediti: daljnogled počasi premikamo z elektromotorjem. Tako ni čudno, da na fotografski plošči zaznamo še mnogo šibkejše zvezde, kot bi jih z očmi. Pri tem se moramo le zavedati, da je spektralna občutljivost fotografske emulzije deloma drugačna od oči.

27.12 Fotografija neba

Paralaksa planetov

Fotografiranje izkoristimo za merjenje paralakse nebesnih teles – podobno, kot smo naredili pri Mesecu z golimi očmi. Ko slikamo planet istočasno iz dveh krajev daleč narazen, bi se morala njegova lega glede na zvezdno ozadje spremeniti. Sliki razvijemo, vsak negativ posebej projiciramo na zaslon, in na povečavi določimo kotne razdalje med planetom in istimi okolišnjimi zvezdami. Iz izmerjenih razlik sledi paralaksa planeta in s tem njegova oddaljenost. Za Mars v opoziciji znaša približno toliko kot njegov kotni premer, 25″.

Paralaksa zvezd

Na opisani način pri zvezdah ni videti nobene paralakse. Očitno je opazovalna osnovnica prekratka. Jo lahko podaljšamo? Največja osnovnica, ki nam je dostopna, je kar premer Zemljinega tira okrog Sonca. Isto zvezdo slikamo v razmaku pol leta in iščemo spremembo njene lege glede na zvezdno ozadje, torej njeno paralakso. Pri tem predpostavimo, da je ozadje dovolj daleč za opazovano zvezdo in je zato njegova paralaksa zanemarljiva; pripomoremo tako, da za ozadje izbiramo šibke zvezde. Aberacija pa, kot vemo, ni opazna, saj deluje na vse zvezde s posnetka enako.

Največja paralaksa, ki jo odkrijemo pri kaki zvezdi, znaša 0,8″. To je torej Soncu najbližja zvezda. Svetloba, ki od Zemlje do Meseca potuje dobro sekundo in do Sonca osem minut, bi potrebovala do prve zvezde kar štiri leta!

Oddaljenost zvezde je priročno opisana kar z njeno letno paralakso $d \propto 1/\gamma$ ali s preletnim časom svetlobe $d \propto t$. Za zvezdo, ki ji izmerimo letno paralakso 1″, bomo rekli, da je oddaljena 1 *parsek* (pc). Iz te zvezde bi torej videli premer Zemljinega tira pod kotom 1 ločne sekunde. Za zvezdo, do katere potrebuje svetloba 1 leto, pa bomo rekli, da je oddaljena 1 *svetlobno leto* (ly). En parsek znaša približno tri svetlobna leta.

Veliki daljnogledi na Zemlji, kjer ne moti preveč migetanje ozračja, merijo kote vse do spodnje meje 0,1″, to je, zaznavajo paralakse zvezd do 10 parsekov oziroma do 30 svetlobnih let daleč. Do tja se nabere okrog 300 zvezd, večinoma tistih, ki jih vidimo z golimi očmi. To pa je le neznaten delež od vseh, ki jih vidimo; velika večina zvezd je torej še mnogo bolj oddaljena. Meja sveta je gotovo še daleč.

27.13 Izsevi zvezd

Magnituda

Že s prostim očesom ločimo zvezde po svetlosti v več razredov. Rečemo, da imajo različno *magnitudo*. Najsvetlejšim (Sirij, Vega) pripišemo magnitudo nič in najšibkejšim še vidnim magnitudo pet; tako lahko vmesne magnitude zanesljivo razločujemo. Merjenje njihovih svetlobnih tokov z daljnogledom in fotouporom pokaže, da magnitudna razlika za pet razredov ustreza razmerju svetlobnih tokov za faktor sto. Zato definiramo razliko magnitud kot

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log \frac{j_1}{j_2} \tag{27.12}$$

in proglasimo magnitudo Vege za natanko 0. Zvezda, katere svetlobni tok je enak Veginemu (oba merjena na Zemlji), ima torej magnitudo nič. Če upoštevamo tok preko vseh valovnih dolžin, je to "bolometrična" magnituda, če preko vidnega intervala, pa "vidna". Magnituda zvezde je odvisna od njenega izseva in oddaljenosti. Od dveh zvezd z enakim izsevom kaže tista, ki je bliže, nižještevilčno (rekli bomo višjo) magnitudo.

Fotografska magnituda

Fotografija zvezd ne kaže le njihovih leg, ampak tudi njihovo svetlost. V vsaki črni packi negativa je skrit podatek o zvezdni magnitudi.

Slika 27.16 Fotografija zvezd. Prikazana je kopica Plejade v ozvezdju Oriona. Vse zvezde so točkasta svetila. Njihova navidezna velikost je posledica uklona svetlobe na objektivu daljnogleda, migotanja ozračja in razsipa svetlobe v emulziji. Svetlejše zvezde so videti večje. (Anthony's Astrophotography)

Žal za opazovano packo ne vemo, kakšen svetlobni tok jo je ustvaril. Zato pred fotografiranjem neba na rob fotografske plošče posnamemo slike Vege, in sicer pri različnih časih osvetlitve. Tako dobimo zaporedne latentne slike za različne absorbirane energije. Nato rob pokrijemo in slikamo nebo. Razvijanje in fiksiranje plošče deluje enako na referentne kot na prave packe. Packe nato preučimo takole.

Na čistem delu plošče, kjer ni zvezd, skozi primerno veliko zaslonko posvetimo z žarkom ter s fotouporom izmerimo prepuščeni tok P_0. Potem isto naredimo z vsako Vegino packo – za katero poznamo osvetlitveni čas – in ji izmerimo prepuščeni tok P. Razmerje $D = -\log(P/P_0)$ poimenujemo *počrnitev* in ima vrednosti med 0 in ∞. Počrnitev je naraščajoča funkcija osvetlitvenega časa in jo narišemo kot osvetlitveno krivuljo $D(t)$.

Potem se lotimo zvezdnih pack. Vsaki packi – za katero poznamo osvetlitveni čas – izmerimo počrnitev. Iz osvetlitvene krivulje razberemo, pri kakšnem osvetlitvenem času bi Vega ustvarila enako počrnitev. Predpostavimo, da je slika zvezde, torej počrnitev filma, enaka, če jo naredi dvakrat manjši tok v dvakrat daljšem času. To pomeni, da velja $j_{\mathrm{star}} \cdot t_{\mathrm{star}} = j_{\mathrm{Vega}} \cdot t_{\mathrm{Vega}}$, iz česar izrazimo razmerje tokov preko razmerja osvetlitvnih časov, in iz slednjega z logaritmiranjem izračunamo magnitudo. Katerokoli zvezdo, ki smo ji tako določili magnitude, lahko kasneje uporabimo za kalibracijo. Meritve so natančne na 0,1 magnitude.

Izsevi zvezd

S precej truda nam uspe izmeriti Vegin svetlobni tok na dnu ozračja in ga nato popraviti glede absorpcije v tok na vrhu ozračja; preko vseh valovnih dolžin znaša

$$j_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2}\,. \tag{27.13}$$

To je tok, ki ga oko zlahka vidi. S tem so določeni tudi tokovi vseh drugih zvezd, ki smo jim izmerili magnitude:

$$m = -2{,}5 \log \frac{j}{j_0}\,. \tag{27.14}$$

Za zvezdo, ki ji poznamo tok in oddaljenost, zlahka izračunamo izsev: $P = j \cdot 4\pi r^2$. Vega, na primer, ki je (paralaktično) oddaljena 25 svetlobnih let, ima izsev 37 izsevov Sonca. Izsevi bližnjih zvezd se gibljejo med 10^{-3} in 10^3 izsevi Sonca.

Kako svetlo zvezdo vidimo na nebu, je odvisno od dveh stvari: kakšen izsev P ima in kako daleč je od nas. Oddaljena zvezda z velikim izsevom je videti enako svetla kot bližnja zvezda z majhnim izsevom. Da lahko primerjamo izseva dveh zvezd, morata biti zvezdi pri enaki oddaljenosti. Zato poleg magnitude zvezde, ki jo vidimo, definiramo še njeno *absolutno magnitudo*, kakršno bi videli, če bi bila pri referentni oddaljensti 10 pc:

$$M = -2{,}5 \log \frac{P / 4\pi \, (10\,\mathrm{pc})^2}{j_0} \, . \tag{27.15}$$

Absolutne magnitude ne moremo meriti, ampak jo lahko izračunamo iz "navadne" magnitude in oddaljenosti: najprej izračunamo izsev, nato pa iz njega absolutno magnitudo. Delo si poenostavimo, če izpeljemo funkcijsko odvisnost $M(m,d)$. Za isto zvezdo pri oddaljenosti d in 10 pc velja: $j(d) = L/4\pi d^2$ in $j(10\,\mathrm{pc}) = L/4\pi(10\,\mathrm{pc})^2$. Po definiciji je $m = -2{,}5 \log j(d)/j_0$ in $M = -2{,}5 \log j(10\,\mathrm{pc})/j_0$. Izračunamo razliko obeh amplitud in dobimo

$$M = m - 5 \log \frac{d}{10\,\mathrm{pc}} \, . \tag{27.16}$$

Vega, ki ima magnitudo 0 in je oddaljena 25 svetlobnih let oziroma 7,7 pc, ima torej absolutno magnitudo 0,6. Sonce ima magnitudo −26,8. Iz razdalje 10 pc bi bilo videti kot neznatna zvezdica magnitude 4,8.

Velikost zvezd

Izsev zvezde je odvisen od njene ploščine in sevalne temperature: $P = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$. Če izsev in temperaturo poznamo, izračunamo ploščino in iz nje premer. Vega s (spektroskopsko) temperaturo 9500 K ima premer 2,5 Sončevega. Premeri bližnjih zvezd se gibljejo med 0,1 in 10^3 Sončevega. □

Glavni viri

Osnovna šola

Smeltzer, D., 2003: *Man and Number.* Dover Publications, Mineola.
Euler, L., 1738/1942: *Einleitung zur Rechenkunst.* Birkhauser Verlag, Basel.
Francisti, J., 1982: *Kalendar i mjerenje vremena.* Nišro Dnevnik, Novi Sad.
Lagan, J., 2006: *The Barefoot Navigator.* Adlard Coles Nautical, London.
Cairns, W., 2008: *About the Size of It.* Pan Books, London.
Haber-Shaim, U., et al., 2002: *Force, Motion, and Energy.* Science Curriculum, Belmont.
Haber-Shaim, U., et al., 1999: *Introductory Physical Science.* Science Curriculum, Belmont.
Ostwald, W., 1953: *Kaj veš o kemiji* (Die Schule der Chemie). Mladinska knjiga, Ljubljana.

Srednja šola

Euler, L., 1770/2006: *Elements of Algebra.* Tarquin Publications, St Albans.
Thompson, S., 1969: *Calculus Made Easy.* Macmillan, London.
Kline, M., 1985: *Mathematics for the Nonmathematician.* Dover Publications, Mineola.
Hogben, L., 1937: *Mathematics for the Million.* Allen and Unwin, London.
Hogben, L., 1938: *Science for the Citizen.* Allen and Unwin, London.
Kuščer, I., et al., 1965: *Fizika, 1–3.* Državna Založba Slovenije, Ljubljana.
Ostwald, W., 1910: *Einführung in die Chemie.* Franckh'sche Verlagshandlung, Stuttgart.
Hočevar, A., et al., 1995: *Meteorologija.* Biotehnična fakulteta, Ljubljana.
Kuhelj, A., 1960: *Tehnika v vsakdanjem življenju 1–2.* Mohorjeva družba, Celje.

Dopolnilno čtivo

Katz, V. (Ed.), 2007: *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook.* Princeton University Press, Princeton.
Smith, D. E., 1959: *A Source Book in Mathematics.* Dover Publications, Mineola.
Maggie, W. F., 1963: *A Source Book in Physics.* Harvard University Press, Cambridge.
Shamos, M. H., 1987: *Great Experiments in Physics.* Dover Publications, Mineola.
Smith, T. P., 2013: *How Big is Big and How Small is Small.* Oxford University Press, Oxford.
Rothman, M., 1963: *The Laws of Physics.* Basic Books, New York.
Rothman, M., 1972: *Discovering the Natural Laws.* Dover Publications, Mineola.
Warren, J., 1965: *The Teaching of Physics.* Butterworth, London.
Burton, D., 2006: *The History of Mathematics.* McGraw-Hill, New York.
Mlađenović, M., 1986: *Razvoj fizike, 1–4.* Građevinska knjiga, Beograd.

Viri slik

Zborniki odlomkov

Longair, M., 2013: *Quantum Concepts in Physics*.
Maggie, W., 1969: *A Source Book in Physics*.
Shamos, M., 1987: *Great Experiments in Physics*.

Publikacije pred 1923

Agricola, 1556: *De Re Metallica*.
Andrews, T., 1869: *The Gaseous and Liquid States of Matter*.
Annet, F., 1921: *Electrical Machinery*.
Apian, P., 1524: *Cosmographia*.
Bose, G., 1744: *Die Elektrizität*.
Brache, T., 1589: *Astronomiae instauratae mechanica*.
Colladon, J., 1826 / grafika v Les Musees a Geneve.
Comstock, G., 1903: *A Text-Book of Astronomy*.
Dalton, J., 1808: *New System of Chemical Philosophy*.
Descartes, R., 1637: *La Dioptrique*.
Dodge, G., 1921: *The Telegraph Instructor*.
Ferrel, W., 1860: *The Motion of Fluids and Solids*.
Frisius, G., 1533, grafika.
Galilei, G., 1638/1974: *Two New Sciences*.
Galvani, L., 1791 / Wells, D., 1859: *The Science of Common Things*.
Hallock, V., 1905: *ICS Reference Library*.
Hawkins, N., 1914: *Electrical Guide*.
Huygens, 1678/1962: *Treatise on Light*.
Joule, J., 1841 / Maggie, W., 1969.
Joule, J., 1852 / Maggie, W., 1969.
Kirchoff, G., 1896 / la Cour, P.: *Historisk Fysik*.
Kopernik, N., 1543: *De revolutionibus orbium coelestium*.
Larive, 1895: *Dictionary of Words and Things*.
Lavoisier, A., 1862: *Traite Elementaire de Chimie*.
Liu Hui, 236/1992: *The Sea Island Mathematical Manual*.
Lutken, A., 1878: *Book of Inventions*.
Millikan, R., 1906: *A First Course in Physics*.
Newton, I., 1730: *Opticks*.
Newton, I., 1729: *Principia*.
Pascal, B., 1663: *Traite de l'Equilibre des Liqueurs*.
Quackenbos, G., 1859: *A Natural Philosophy*.
Ritter, J., 1800: Voigts Magazin.
Stevin, S., 1586: *De Beghinselen der Weeghconst*.
Sturgeon, W., 1824: arhiv British Roy. Soc.
Torricelli, E., 1644 / Collected Works 1919.
Tower, W., 1920: *Physics*.
Volta, A., 1800: *On the Electricity*.

Publikacije po 1923

Dyke, M., 1982: *An Atlas of Fluid Motion*.
Green, M., 1982: *Solar Cells*.
Hogben, L., 1960: *Mathematics in the Making*.
Kuhelj, A., 1960: *Tehnika v vsakdanjem življenju*.
Michelson, A., 1927: *Studies in Optics*.
NavPers, 1945: *Submarine Refrigeration Systems*.
Needham, J., 1995: *Science and Civilisation in China*.
Pohl, R., 1969: *Einführung in die Physik*.
Ryer, A., 2000: *Light Measurement Handbook*.
Vidmar, M., 1952: *Razgovori o elektrotehniki*.

Spletišča

AAC – All About Circuits
A-level Physics Tutor

Altec Lab Equipment
Anthony's Astrophotography
Avogadro's Lab Supply
Brent Mail Photography
Brock University
Celestial Products
Deutsches Museum, München
Dollond, London
Encyclopedia Britannica
Global Lab Ware
Harvard University
Hungarian Geographic Museum, Erd
HyperPhysics / Nave, R.
Institute for Food Science, New Zealand
IOP – Institute of Physics, USA
Lab Connections
Lake Tahoe College
Maine Academy of Audiology
MIT – Massachusetts Institute of Technology
Musee des Artes et Metiers, Pariz
Musee du Louvre, Pariz
Museeum Boerhaave, Leiden
Museo Galileo, Firence
Museu das Comunicacoes de Macau, Macau
National Geographic
National Maritime Museum, Greenwich
National Rifle Association
Niigata University
Nobel Media
Norfolk Mills
Oxford Science Museum, Oxford
Pasco Scientific
Penn State University
Pisgah Astronomical Research Institute
PSSC – Physical Science Study Committee
Royal Observatory, Greenwich
Science Museum, London
School Historical Museum, Bremerhaven
University Melbourne
University of Cambridge
University of Colorado
University of Michigan
Verband der Elektrotechnik, Frankfurt
Weather Station Products
Wesleyan University

Posamezniki Kuiper, P.

Kazalo

ISBN 978-961-290-113-4 (pdf)